

XLII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Primeira Fase (11 de agosto de 2018)

Nível α (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)



Folha de Perguntas

- Instruções:**
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
 - Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
 - Coloque nas *Folhas de Respostas* todos os dados pessoais solicitados.
 - Todas as respostas devem ser **justificadas**, e apresentadas somente nas *Folhas de Respostas*.
 - Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
 - Ao terminar, entregue apenas as *Folhas de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Em 1999, Mark Laugesen propôs o *New Earth Time* (NET), que é uma maneira alternativa de se medir o tempo no dia. O dia é dividido em 360 graus NET, cada grau NET é dividido em 60 minutos NET e cada minuto NET é dividido em 60 segundos NET. 360 graus NET correspondem à nossa meia-noite e, por exemplo, o nosso meio-dia corresponde a 180 graus NET. Com isso, um relógio analógico NET, como o da figura ao lado, tem um ponteiro só, indicando o momento do dia. O relógio ao lado está marcando 285 graus NET, que correspondem a 19h no nosso relógio.



- a) A prova da fase final da OPM será realizada das 8:00 às 11:30. Apresente horário de início e de final da prova (esperamos você lá!) em graus NET.

Para se acostumar com as duas escalas, Atrasaldo comprou um relógio que tem o ponteiro NET (o ponteiro maior) e o ponteiro dos minutos (o ponteiro menor):



- b) Observe que, em 24 horas, o ponteiro dos minutos dá 24 voltas. Entre 00:01 e 23:59 do mesmo dia, quantas vezes o ponteiro dos minutos cruza o ponteiro NET?

PROBLEMA 2

Ao listar os preços internacionais dos combustíveis em 165 países, a consultoria *Global Petrol Prices* destaca que o preço do litro do óleo diesel no Brasil está abaixo da média mundial. A tabela a seguir mostra os preços do litro do diesel em dez países da América do Sul.

País	Preço (em US\$)
Argentina	0,93
Bolívia	0,54
Brasil	0,91
Chile	0,95
Colômbia	0,75

País	Preço (em US\$)
Equador	0,27
Paraguai	0,99
Peru	0,97
Uruguai	1,31
Venezuela	0,00*

*Na Venezuela, o preço do diesel fica muito pequeno após a conversão para o dólar, ficando menor do que um centavo.

- a) Calcule a média do preço do diesel nos dez países destacados na tabela, ou seja, some os dez valores e, em seguida, divida o resultado por dez. A partir da sua resposta, determine se o preço do diesel, em dólares, do Brasil está acima ou abaixo da média desses dez países.
- b) Um carro equipado com motor movido a diesel consome, em média, 14,5 km/l quando roda em estradas, ou seja, esse carro gasta 1 litro de diesel para percorrer 14,5 km quando dirigido em uma estrada. Vamos usar esse carro para ir da cidade de São Paulo para a Olimpíada Rioplatense de Matemática, na Fundación Olimpiada Matemáticas Argentina (FOMA), em Buenos Aires. Um trajeto possível é atravessar o Uruguai: vamos até o Rio Grande do Sul, atravessamos o Uruguai até Colonia del Sacramento, tomamos uma balsa até Tigre, na Argentina, e dirigimos até a FOMA. Rodaremos de carro 1500 km no Brasil, 560 km no Uruguai e 30 km na Argentina.
- Supondo que o diesel utilizado dentro de cada país é comprado dentro desse país, calcule os gastos com diesel nos três países, em dólares.

PROBLEMA 3

Um quebra-cabeça é jogado num tabuleiro retangular com números em algumas de suas casinhas. Resolvê-lo consiste em delinear retângulos que satisfazem a todas as seguintes condições:

- Os retângulos cobrem todo o tabuleiro, sem sobreposições nem buracos;
- Cada retângulo contém em seu interior exatamente um número;
- A área de cada retângulo, em quantidade de casinhas, é igual ao número contido nele.

A seguir, exibimos à esquerda um quebra-cabeça e à direita, sua solução.

				2
			3	
		9		
	8			3

				2
			3	
		9		
	8			3

a) Copie o quebra-cabeça a seguir na sua Folha de Respostas e resolva-o. Use o modelo dado nas figuras anteriores para indicar a solução.

		7				4
10					3	
				15		
	4		6			

b) Considere um quebra-cabeça na forma de um tabuleiro com 10 linhas e 10 colunas, num total de 100 casinhas. Nesse tabuleiro há alguns números. Explique por que não é possível que três desses números sejam 42, 36 e 14.

PROBLEMA 4

Um *carimbolo* é uma figura plana que ao ser colocada sobre uma folha de papel grava um desenho nela. Quando fazemos essa operação, nós *carimbolamos* a região desenhada no papel.

Um sólido é chamado de *carimbolão* se:

- cada uma de suas faces é um carimbolo (sim, você vai sujar sua mão ao segurar um carimbolão);
- é possível, tombando o sólido repetidas vezes, carimboldar todo o plano, sem carimboldar o mesmo lugar mais de uma vez.

Um exemplo de carimbolão é o cubo mostrado a seguir, com os numerais de 1 a 6 nas suas faces, de modo que a soma dos numerais em faces opostas é 7. Na figura, ao tombarmos o cubo para a direita, o 2 fica marcado no plano.

a) Suponha que após carimboldar o 2, tombamos mais uma vez para a direita para carimboldar a região R e, em seguida, tombamos para a frente para carimboldar a região S. Determine os numerais carimbolados nas regiões R e S.

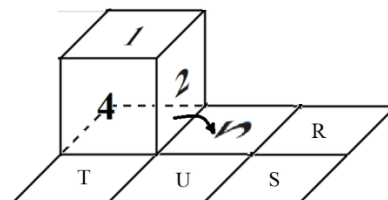


Figura 1

Entre os carimbolões, ainda há um tipo mais interessante: os *carimbolões perfeitos*. Um carimbolão é perfeito se suas faces contêm numerais todos distintos e a figura obtida ao carimboldar todo o plano não muda se o tombarmos de maneiras distintas.

b) Voltemos para a posição inicial com o 1 na face superior do cubo e o 4 voltado para frente. Tombamos o cubo para frente para carimboldar a região T e duas vezes para a direita, carimboldando as regiões U e S nessa ordem. Determine os numerais carimbolados nas regiões T, U e S. O cubo é um carimbolão perfeito?

c) A figura 2 a seguir mostra um exemplo de carimbolão perfeito: o tetraedro regular. Nesse exemplo, as quatro faces do tetraedro têm numerais de 1 a 4, com o 4 encostado no plano. Na figura 3 mostramos, parcialmente, como o plano é carimbolado. O triângulo com o 4 representa a posição inicial do tetraedro. Determine os numerais em X, Y e Z.

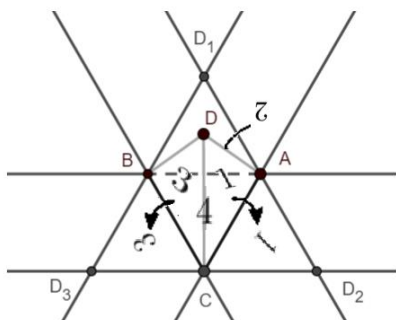


Figura 2

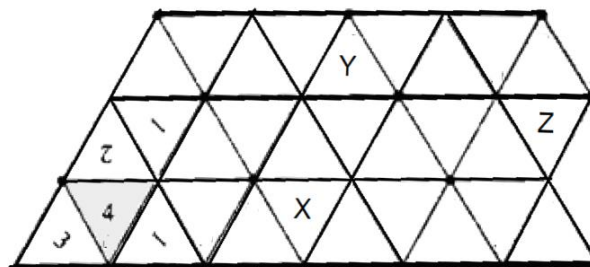


Figura 3

PROBLEMA 5

O grande matemático John Horton Conway é conhecido por criar métodos práticos e criativos. Observando que na fatoração dos números 152, 153, 154, 155 e 156 aparecem os primos 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 e 31, ele desenvolveu um algoritmo para fatorar rapidamente números de três algarismos (ou, com um pouco de sorte, números maiores). A seguir, apresentaremos, com a sua ajuda (isso mesmo!), o chamado *Método 150 de Conway*.

- Seja N o número que desejamos decompor em primos. Para aplicar o algoritmo, inicialmente, obtemos o quociente K e o resto A na divisão Euclidiana de N por 150, isto é, $N = 150K + A$, com $0 \leq A < 150$. Por exemplo, para $N = 931$, $K = 6$ e $A = 31$.
- Como $150 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$, ou seja, 150 possui os fatores primos 2, 3 e 5, N é divisível por um desses fatores se, e somente se, A também é divisível. Assim, 931 não possui os fatores 2, 3 e 5, pois 31 também não possui. Há maneiras mais fáceis de verificar isso e imagino que você, participante da OPM 2018, não esteja muito impressionado. O legal vem agora!
- Calculamos, então, $B = A - 2K$. N é divisível por 19 se, e somente se, B é divisível por 19. No nosso exemplo, $B = A - 2K = 31 - 2 \cdot 6 = 19$, que claramente é divisível por 19. Ou seja, 19 é fator primo de 931. Por quê? Como $N = 150K + A$, $B = A - 2K = (N - 150K) - 2K = N - 152K$. Sendo $152 = 2^3 \cdot 19$, $B = N - 19 \cdot (2^3 K)$, ou seja, $N = B + 19 \cdot (2^3 K)$. Consequentemente, se B é um múltiplo de 19, N também é.
- Fazemos, em seguida, $C = B - K = A - 3K$. N é divisível por 17 se, e somente se, C é divisível por 17. No nosso exemplo, $C = A - 3K = 31 - 3 \cdot 6 = 13$, que não é divisível por 17. Ou seja, 17 não é fator primo de 931.

a) Fatore 153 em primos e justifique por que N é divisível por 17 se, e somente se, C é divisível por 17.

Os próximos passos do algoritmo são similares.

- Fazemos $D = C - K = A - 4K = N - 154K$. Como $154 = 2 \cdot 7 \cdot 11$, ou seja, 154 possui os fatores primos 7 e 11 (além do 2), N é divisível por um desses fatores se, e somente se, D também é divisível. No nosso exemplo, $D = A - 4K = 31 - 4 \cdot 6 = 7$, que é divisível por 7, mas não é por 11. Ou seja, 7 é fator primo de 931, mas 11 não é. De fato, concluindo a fatoração, $931 = 7^2 \cdot 19$.

Observe que, na determinação dos fatores primos de 931, não precisamos utilizar as fatorações de 155 e de 156.

b) Escreva os dois últimos passos do algoritmo, ou seja: defina E e determine quais fatores primos de N podem ser obtidos a partir do cálculo de E ; defina F e determine quais fatores primos de N podem ser obtidos a partir do cálculo de F . Não se esqueça de justificar sua resposta.

c) Utilizando o Método 150 de Conway, fator 3689 em primos. Apresente todos os passos do algoritmo.

d) O Método 150 de Conway não determina se um número N possui o fator primo 23. Caso queiramos incluir esse primo na lista de fatores de N que conseguimos encontrar, podemos utilizar o *Método 300*. Esse algoritmo é análogo ao Método 150, mas utiliza números próximos a 300. Qual é o múltiplo de 23 que motiva a utilização do Método 300? Não se esqueça de justificar sua resposta.

XLII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Primeira Fase (11 de agosto de 2018)

Nível β (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)



Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Coloque nas *Folhas de Respostas* todos os dados pessoais solicitados.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**, e apresentadas somente nas *Folhas de Respostas*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas as *Folhas de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Ao listar os preços internacionais dos combustíveis em 165 países, a consultoria *Global Petrol Prices* destaca que o preço do litro do óleo diesel no Brasil está abaixo da média mundial. A tabela a seguir mostra os preços do litro do diesel em dez países da América do Sul.

País	Preço (em US\$)
Argentina	0,93
Bolívia	0,54
Brasil	0,91
Chile	0,95
Colômbia	0,75

País	Preço (em US\$)
Equador	0,27
Paraguai	0,99
Peru	0,97
Uruguai	1,31
Venezuela	0,00*

*Na Venezuela, o preço do diesel fica muito pequeno após a conversão para o dólar, ficando menor do que um centavo.

a) Calcule a média do preço do diesel nos dez países destacados na tabela. A partir da sua resposta, determine se o preço do diesel, em dólares, do Brasil está acima ou abaixo da média desses dez países.

b) Um carro equipado com motor movido a diesel consome, em média, 14,5 km/l quando roda em estradas, ou seja, esse carro gasta 1 litro de diesel para percorrer 14,5 km quando dirigido em uma estrada. Vamos usar esse carro para ir da cidade de São Paulo para a Olimpíada Rioplatense de Matemática, na Fundación Olimpíada Matemáticas Argentina (FOMA), em Buenos Aires.

Um trajeto possível é atravessar o Uruguai: vamos até o Rio Grande do Sul, atravessamos o Uruguai até Colonia del Sacramento, tomamos uma balsa até Tigre, na Argentina, e dirigimos até a FOMA. Rodaremos de carro 1500 km no Brasil, 560 km no Uruguai e 30 km na Argentina.

Supondo que o diesel utilizado dentro de cada país é comprado dentro desse país, calcule o gasto total com diesel na viagem pelos três países, em dólares.

PROBLEMA 2

Um quebra-cabeça é jogado num tabuleiro retangular com números em algumas de suas casinhas. Resolvê-lo consiste em delinear retângulos que satisfazem a todas as seguintes condições:

- Os retângulos cobrem todo o tabuleiro, sem sobreposições nem buracos;
- Cada retângulo contém em seu interior exatamente um número;
- A área de cada retângulo, em quantidade de casinhas, é igual ao número contido nele.

A seguir, exibimos à esquerda um quebra-cabeça e à direita, sua solução.

				2
			3	
		9		
	8			3

				2
			3	
		9		
	8			3

a) Copie o quebra-cabeça a seguir na sua Folha de Respostas e resolva-o. Use o modelo dado nas figuras anteriores para indicar a solução.

		7				4
10					3	
				15		
	4		6			

b) Considere um quebra-cabeça na forma de um tabuleiro com 10 linhas e 10 colunas, num total de 100 casinhas. Nesse tabuleiro há alguns números. Explique por que não é possível que três desses números sejam 42, 36 e 14.

PROBLEMA 3

a) Prove a identidade de Catalan:

$$x(x - 3(y + z))^2 + (y + z)(3x - (y + z))^2 = (x + y + z)^3.$$

Sugestão: faça $x + y + z = k$ e escreva o lado esquerdo da identidade em termos apenas de x e k . A expressão obtida deve ser igual ao lado direito, que é k^3 . As contas devem ficar mais simples assim.

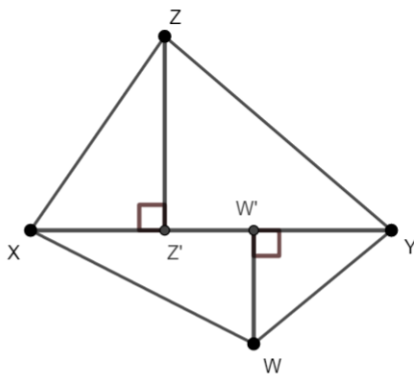
b) Podemos escrever 14 como a soma de três quadrados de naturais; de fato, $14 = 3^2 + 2^2 + 1^2$. É fácil verificar que essa é a única maneira de escrever 14 como soma de três quadrados. Mostre como escrever 14^3 de três maneiras distintas como soma de três quadrados. Ou seja, determine três soluções da equação $14^3 = a^2 + b^2 + c^2$ com $a > b > c$ inteiros positivos.

Sugestão: o item a pode te fornecer todas as maneiras (aqui é OPM, a prova dos itens que ajudam!).

PROBLEMA 4

Neste problema, utilizaremos o seguinte teorema:

Dados um segmento XY e dois pontos Z e W no plano que não estão na reta XY , a reta ZW é perpendicular à reta XY se, e somente se, $ZX^2 - ZY^2 = WX^2 - WY^2$.



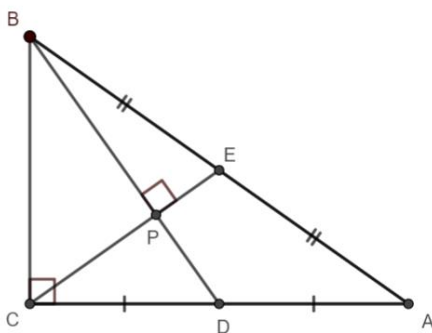
a) Seja Z' e W' os pés das perpendiculares de Z e W sobre a reta XY . Prove que se $Z' = W'$ então $ZX^2 - ZY^2 = WX^2 - WY^2$ (essa é a ida do teorema).

Vamos agora aplicar o teorema ao seguinte problema:

Quais triângulos retângulos possuem duas medianas perpendiculares?

Lembre-se de que mediana de um triângulo é um segmento que liga o vértice ao ponto médio do lado oposto.

Considere o triângulo ABC com $m(\hat{A}CB) = 90^\circ$. Os pontos médios de AC e AB são D e E , respectivamente, e as medianas BD e CE se encontram no ponto P . Sejam $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$.



b) Explique por que os triângulos ABC e AED são semelhantes e prove que $DE = \frac{a}{2}$.

c) Usando o teorema, prove que $c^2 = 5a^2 - b^2$.

d) Resolva o problema inicial, ou seja, determine todos os triângulos retângulos que possuem duas medianas perpendiculares.

PROBLEMA 5

O grande matemático John Horton Conway é conhecido por criar métodos práticos e criativos. Observando que na fatoração dos números 152, 153, 154, 155 e 156 aparecem os primos 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 e 31, ele desenvolveu um algoritmo para fatorar rapidamente números de três algarismos (ou, com um pouco de sorte, números maiores). A seguir, apresentaremos, com a sua ajuda (isso mesmo!), o chamado *Método 150 de Conway*.

- Seja N o número que desejamos decompor em primos. Para aplicar o algoritmo, inicialmente, obtemos o quociente K e o resto A na divisão Euclidiana de N por 150, isto é, $N = 150K + A$, com $0 \leq A < 150$. Por exemplo, para $N = 931$, $K = 6$ e $A = 31$.
- Como $150 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$, ou seja, 150 possui os fatores primos 2, 3 e 5, N é divisível por um desses fatores se, e somente se, A também é divisível. Assim, 931 não possui os fatores 2, 3 e 5, pois 31 também não possui. Há maneiras mais fáceis de verificar isso e imagino que você, participante da OPM 2018, não esteja muito impressionado. O legal vem agora!
- Calculamos, então, $B = A - 2K$. N é divisível por 19 se, e somente se, B é divisível por 19. No nosso exemplo, $B = A - 2K = 31 - 2 \cdot 6 = 19$, que claramente é divisível por 19. Ou seja, 19 é fator primo de 931. Por quê? Como $N = 150K + A$, $B = A - 2K = (N - 150K) - 2K = N - 152K$. Sendo $152 = 2^3 \cdot 19$, $B = N - 19 \cdot (2^3 K)$, ou seja, $N = B + 19 \cdot (2^3 K)$. Consequentemente, se B é um múltiplo de 19, N também é.
- Fazemos, em seguida, $C = B - K = A - 3K$. N é divisível por 17 se, e somente se, C é divisível por 17. No nosso exemplo, $C = A - 3K = 31 - 3 \cdot 6 = 13$, que não é divisível por 17. Ou seja, 17 não é fator primo de 931.

a) Fatore 153 em primos e justifique por que N é divisível por 17 se, e somente se, C é divisível por 17.

Os próximos passos do algoritmo são similares.

- Fazemos $D = C - K = A - 4K = N - 154K$. Como $154 = 2 \cdot 7 \cdot 11$, ou seja, 154 possui os fatores primos 7 e 11 (além do 2), N é divisível por um desses fatores se, e somente se, D também é divisível. No nosso exemplo, $D = A - 4K = 31 - 4 \cdot 6 = 7$, que é divisível por 7, mas não é por 11. Ou seja, 7 é fator primo de 931, mas 11 não é. De fato, concluindo a fatoração, $931 = 7^2 \cdot 19$.

Observe que, na determinação dos fatores primos de 931, não precisamos utilizar as fatorações de 155 e de 156.

b) Escreva os dois últimos passos do algoritmo, ou seja: defina E e determine quais fatores primos de N podem ser obtidos a partir do cálculo de E ; defina F e determine quais fatores primos de N podem ser obtidos a partir do cálculo de F . Não se esqueça de justificar sua resposta.

c) Utilizando o Método 150 de Conway, fator 3689 em primos. Apresente todos os passos do algoritmo.

d) O Método 150 de Conway não determina se um número N possui o fator primo 23. Caso queiramos incluir todos os primos menores do que 70 – o que nos permitiria fatorar rapidamente números de quatro dígitos – podemos utilizar o *Método 2000*. Esse algoritmo é análogo ao Método 150, mas utiliza números próximos a 2000. Encontre dez números próximos de 2000 – de fato entre 1950 e 2050 – que contêm, em suas fatorações, todos os primos menores do que 70. Esses números não precisam ser dez números consecutivos.

Você pode desejar utilizar na sua resolução que $2025 = 45^2$.

XLII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Primeira Fase (11 de agosto de 2018)

Nível γ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)



Folha de Perguntas

- Instruções:**
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
 - Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
 - Coloque nas *Folhas de Respostas* todos os dados pessoais solicitados.
 - Todas as respostas devem ser **justificadas**, e apresentadas somente nas *Folhas de Respostas*.
 - Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
 - Ao terminar, entregue apenas as *Folhas de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

O grande matemático John Horton Conway é conhecido por criar métodos práticos e criativos. Observando que na fatoração dos números 152, 153, 154, 155 e 156 aparecem os primos 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 e 31, ele desenvolveu um algoritmo para fatorar rapidamente números de três algarismos (ou, com um pouco de sorte, números maiores). A seguir, apresentaremos, com a sua ajuda (isso mesmo!), o chamado *Método 150 de Conway*.

- Seja N o número que desejamos decompor em primos. Para aplicar o algoritmo, inicialmente, obtemos o quociente K e o resto A na divisão Euclidiana de N por 150, isto é, $N = 150K + A$, com $0 \leq A < 150$. Por exemplo, para $N = 931$, $K = 6$ e $A = 31$.
- Como $150 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$, ou seja, 150 possui os fatores primos 2, 3 e 5, N é divisível por um desses fatores se, e somente se, A também é divisível. Assim, 931 não possui os fatores 2, 3 e 5, pois 31 também não possui. Há maneiras mais fáceis de verificar isso e imagino que você, participante da OPM 2018, não esteja muito impressionado. O legal vem agora!
- Calculamos, então, $B = A - 2K$. N é divisível por 19 se, e somente se, B é divisível por 19. No nosso exemplo, $B = A - 2K = 31 - 2 \cdot 6 = 19$, que claramente é divisível por 19. Ou seja, 19 é fator primo de 931. Por quê? Como $N = 150K + A$, $B = A - 2K = (N - 150K) - 2K = N - 152K$. Sendo $152 = 2^3 \cdot 19$, $B = N - 19 \cdot (2^3 K)$, ou seja, $N = B + 19 \cdot (2^3 K)$. Consequentemente, se B é um múltiplo de 19, N também é.
- Fazemos, em seguida, $C = B - K = A - 3K$. N é divisível por 17 se, e somente se, C é divisível por 17. No nosso exemplo, $C = A - 3K = 31 - 3 \cdot 6 = 13$, que não é divisível por 17. Ou seja, 17 não é fator primo de 931.

a) Fatore 153 em primos e justifique por que N é divisível por 17 se, e somente se, C é divisível por 17.

Os próximos passos do algoritmo são similares.

- Fazemos $D = C - K = A - 4K = N - 154K$. Como $154 = 2 \cdot 7 \cdot 11$, ou seja, 154 possui os fatores primos 7 e 11 (além do 2), N é divisível por um desses fatores se, e somente se, D também é divisível. No nosso exemplo, $D = A - 4K = 31 - 4 \cdot 6 = 7$, que é divisível por 7, mas não é por 11. Ou seja, 7 é fator primo de 931, mas 11 não é. De fato, concluindo a fatoração, $931 = 7^2 \cdot 19$.

Observe que, na determinação dos fatores primos de 931, não precisamos utilizar as fatorações de 155 e de 156.

b) Escreva os dois últimos passos do algoritmo, ou seja: defina E e determine quais fatores primos de N podem ser obtidos a partir do cálculo de E ; defina F e determine quais fatores primos de N podem ser obtidos a partir do cálculo de F . Não se esqueça de justificar sua resposta.

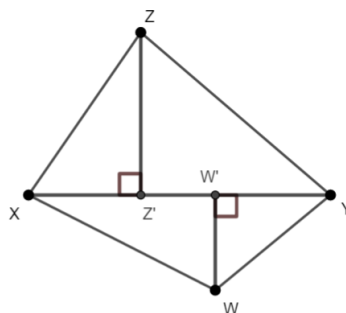
c) Utilizando o Método 150 de Conway, fator 3689 em primos. Apresente todos os passos do algoritmo.

d) Qual é o menor número composto para o qual o Método 150 de Conway não funciona? Ou seja, o algoritmo não determina nenhum dos fatores primos do número.

PROBLEMA 2

Neste problema, utilizaremos o seguinte teorema:

Dados um segmento XY e dois pontos Z e W no plano que não estão na reta XY , a reta ZW é perpendicular à reta XY se, e somente se, $ZX^2 - ZY^2 = WX^2 - WY^2$.



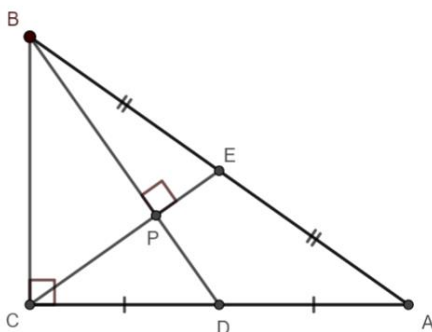
a) Seja Z' e W' os pés das perpendiculares de Z e W sobre a reta XY . Prove que se $Z' = W'$ então $ZX^2 - ZY^2 = WX^2 - WY^2$ (essa é a ida do teorema).

Vamos agora aplicar o teorema ao seguinte problema:

Quais triângulos retângulos possuem duas medianas perpendiculares?

Lembre-se de que mediana de um triângulo é um segmento que liga o vértice ao ponto médio do lado oposto.

Considere o triângulo ABC com $m(\hat{ACB}) = 90^\circ$. Os pontos médios de AC e AB são D e E , respectivamente, e as medianas BD e CE se encontram no ponto P . Sejam $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$.



- b) Explique por que os triângulos ABC e AED são semelhantes e prove que $DE = \frac{a}{2}$.
 c) Usando o teorema, prove que $c^2 = 5a^2 - b^2$.
 d) Resolva o problema inicial, ou seja, determine todos os triângulos retângulos que possuem duas medianas perpendiculares.

PROBLEMA 3

Nessa questão veremos como resolver uma equação do segundo grau utilizando Trigonometria.

- a) Considere a equação $ax^2 + bx - c = 0$ em que os parâmetros a e c são positivos. Fazendo a substituição $x = \sqrt{\frac{c}{a}} \operatorname{tg} \theta$, conclua que $\operatorname{tg} 2\theta = 2 \frac{\sqrt{ac}}{b}$.
 b) Considere a equação $ax^2 + bx + c = 0$ em que os parâmetros a e c são positivos. Fazendo novamente a substituição $x = \sqrt{\frac{c}{a}} \operatorname{tg} \theta$, conclua que $\operatorname{sen} 2\theta = -2 \frac{\sqrt{ac}}{b}$.
 c) A partir do método apresentado nos itens a e b, mostre que uma equação do 2º grau não possui raiz real se, e somente se, $\Delta < 0$.
 d) Sendo x como na substituição apresentada acima, determine os valores de θ , $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, para a equação $x^2 - 2x - 1 = 0$.

Você pode desejar utilizar na resolução os seguintes fatos:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 2\theta &= 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \\ \cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta \\ \operatorname{tg} x &= \operatorname{tg} y \Leftrightarrow x = y + k\pi; k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

PROBLEMA 4

Seja n inteiro positivo.

- a) Determine o número de maneiras de escolher $2n + 1$ números do conjunto $\{1, 2, \dots, 4n + 1\}$ sendo exatamente k números, $0 \leq k \leq n$, do conjunto $\{1, 2, \dots, 2n\}$.
 b) Determine o número de maneiras de escolher $2n + 1$ números do conjunto $\{1, 2, \dots, 4n + 1\}$ sendo exatamente k números, $n + 1 \leq k \leq 2n + 1$, do conjunto $\{1, 2, \dots, 2n + 1\}$.
 c) Demonstre a identidade:

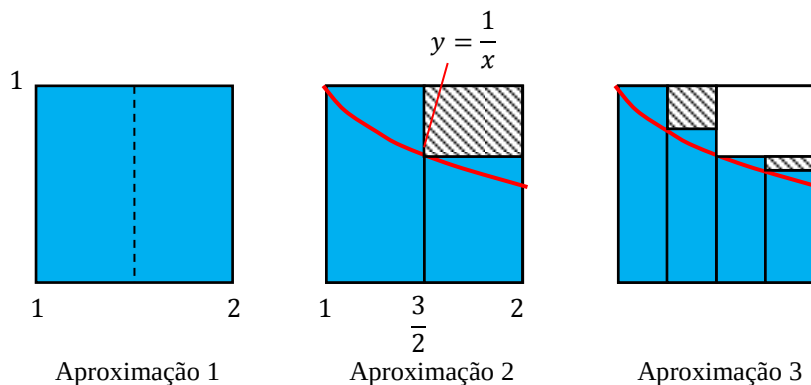
$$\sum_{k=0}^n \binom{2n}{k} \binom{2n+1}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \binom{2n}{k-1} = \binom{4n+1}{2n} + \binom{2n}{n}^2$$

PROBLEMA 5

Nesse problema, usando o fato de que a área abaixo do gráfico de $y = \frac{1}{x}$ para x entre 1 e t é $\ln t$, mostraremos que

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$$

De fato, uma sequência de aproximações da área com retângulos mostra a identidade:



Começando de um quadrado de lado 1 cujo lado inferior é o segmento que liga os pontos $(1; 0)$ e $(2; 0)$, obtemos a próxima aproximação traçando retas verticais que passam pelo ponto médio dos lados de cada um dos retângulos que formam a aproximação anterior, e retirando regiões. Elas estão hachuradas (▨) na figura anterior.

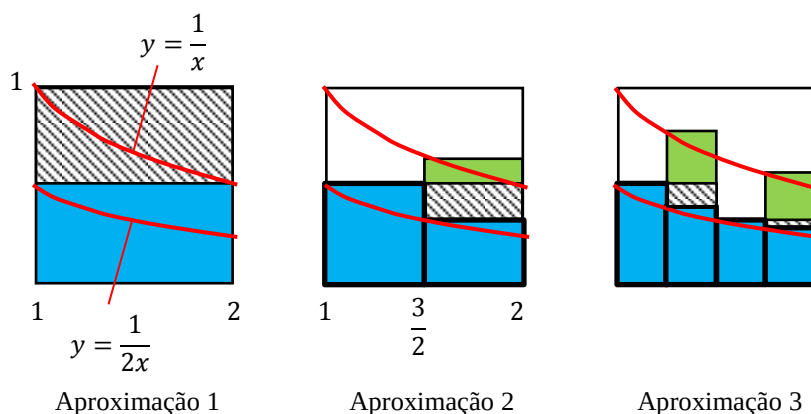
a) Na aproximação 2, a área retirada é $\frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$. Explique por que a área retirada na aproximação 3 é $\frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7}$.

b) Encontre a área retirada na aproximação n e conclua que

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$$

c) Quando consideramos somas infinitas com parcelas negativas e positivas, a ordem das parcelas pode alterar a soma! Usando agora que a área abaixo do gráfico de $y = \frac{1}{2x}$ para x entre 1 e t é $\frac{1}{2} \ln t$ e a sequência de figuras a seguir, na qual apresentamos as três primeiras aproximações, podemos concluir que

$$\frac{1}{2} \ln 2 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) + \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} - \frac{1}{14}\right) + \dots$$



Determine quais parcelas são somadas e quais são subtraídas na Aproximação n e justifique por que isso prova a igualdade apresentada acima.