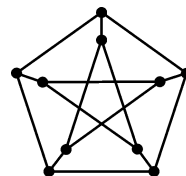


XLVI OLIMPIÁDA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Fase Única (outubro de 2022)

Nível α (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)



www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:

- Nesta prova há 7 problemas. Você deve resolver 5 problemas.
- Caso você resolva mais de 5 problemas, sua nota é a soma das 5 maiores pontuações obtidas. Isso também vale para pontuações parciais.
- A duração da prova é de 4h30min.
- Escreva na primeira página da sua prova o horário em que você começou a prova e o horário em que você terminou a prova.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**.
- Somente serão aceitas resoluções feitas à mão, a tinta ou a lápis. Soluções digitadas em computador, por exemplo, não serão aceitas.
- Em dispositivos eletrônicos, os únicos usos permitidos são:
 - (1) leitor de arquivos somente para visualizar os enunciados;
 - (2) calculadora sem acesso à Internet.
- Não é permitido nenhum tipo de consulta, incluindo qualquer tipo de material físico (por exemplo, cadernos e livros) ou eletrônico/Internet.

PROBLEMA 1 – Valor: 2 pontos

No Campeonato Argentino de Futebol Masculino, o rebaixamento da primeira para a segunda divisão é decidido da seguinte forma: para cada time, a média de pontos por jogo nos últimos três anos é calculada, e os times com as menores médias são rebaixados. Os jogos que entram no cálculo dessa média são os da primeira divisão do Campeonato Argentino e os da Copa da Liga Profissional.

Por exemplo, o Racing, campeão argentino de 2018/2019, obteve 55 pontos em 2016/2017, 45 pontos em 2017/2018 e 57 pontos em 2018/2019, obtidos em um total de 82 jogos. Com isso, sua média de pontos por jogo das três temporadas foi $\frac{55+45+57}{82} \cong 1,915$.

a) Na mesma temporada de 2018/2019, o campeão da Copa Argentina (que na época não entrava na média), o Tigre, obteve 31 pontos em 2016/2017, 24 pontos em 2017/2018 e 36 pontos em 2018/2019, obtidos em um total de 82 jogos. Apesar de nunca ter terminado entre os quatro últimos nos três anos (24º de 30 em 2016/2017, 24º de 28 em 2017/2018, 9º de 26 em 2018/2019), o Tigre foi um dos quatro times rebaixados naquela temporada. Calcule a média de pontos por jogo do Tigre.

Na temporada 2021/2022, o Vélez Sarsfield está em penúltimo lugar do Campeonato Argentino, cada time vai jogar mais 10 jogos, e o regulamento prevê dois rebaixados. Nesse momento, os dois clubes com menores médias são o Patronato, com um total de 94 pontos em 93 jogos, e Aldovisi, com 99 pontos em 93 jogos.

b) Calcule as maiores médias possíveis que Patronato e Aldovisi podem obter se ambos vencessem os últimos 10 jogos. Lembrando que no futebol, cada vitória vale 3 pontos, cada empate vale 1 ponto e cada derrota vale 0 ponto.

c) O Vélez Sarsfield tem um total de 139 pontos em 93 jogos. Calcule a menor média possível que o clube pode obter e mostre que é impossível que o Vélez Sarsfield seja rebaixado nesta temporada.

PROBLEMA 2 – Valor: 3 pontos

Nesta questão falamos sobre apostas esportivas, mas apenas pela matemática envolvida. Lembramos que apenas maiores de idade podem fazer apostas.

Este é um ano de Copa do Mundo e é comum as pessoas fazerem apostas ou participarem de bolões envolvendo os resultados do torneio. De fato, atualmente, é comum os fãs apostarem em sites especializados. Uma ideia que parece fazer sentido é: *vou apostar em todos os times, ganharei de qualquer jeito!* Neste problema, veremos que essa ideia não é tão boa quanto parece.

Inicialmente, vamos entender como os sites costumam publicar o quanto eles pagam por valor apostado. Para isso vamos precisar do conceito de *chance* (*odds*: chances em Inglês). Sendo s o número de *sucessos* (resultados favoráveis) e n o número de resultados possíveis, a chance do evento é $(n - s)/s$. Costuma-se ler: *a chance é $n - s$ para s* . Observe que $n - s$ corresponde ao número de *fracassos* (resultados desfavoráveis).

Por exemplo, ao lançarmos um dado padrão de seis faces, a chance de obter a face com o número 6 é $5/1$ (lemos 5 para 1). Há 5 resultados desfavoráveis (as faces com os números 1, 2, 3, 4 e 5) e apenas um favorável (a face com o 6). Observe que $5/1 = 5$, mas escrevemos a chance sempre na forma de fração. Quando a fração é redutível, é usual simplificá-la. Por exemplo a chance de tirar 1 ou 2 em um dado de seis faces é $4/2 = 2/1$ (lemos 2 para 1).

a) Calcule a chance de obter um número par ao lançar um dado padrão de seis faces?

A probabilidade p de um resultado favorável é igual a $\frac{\text{número de sucessos}}{\text{número de resultados possíveis}}$, ou seja, pode ser calculada pela fórmula $p = \frac{s}{n}$.

Podemos relacionar a chance c e a probabilidade p usando o seguinte desenvolvimento.

$$c = \frac{n - s}{s} = \frac{\frac{(n - s)}{n}}{\frac{s}{n}} = \frac{\frac{n - s}{n}}{\frac{s}{n}} = \frac{1 - p}{p}$$

Logo, por meio da fórmula $c = \frac{1-p}{p}$, sabendo c podemos calcular p e vice-versa.

b) Um site de apostas afirma que o Brasil é favorito para a Copa (oba!) e a sua chance de ser campeão é $9/2$. Calcule a probabilidade de o Brasil vencer a Copa segundo este site.

c) Faça o “inverso” do que foi feito acima, ou seja, escreva uma fórmula que tenha de um lado apenas o p e do outro uma expressão em termos de c .

As chances fornecidas pelos sites de apostas também indicam quanto eles pagam para as pessoas que acertam seus prognósticos esportivos. Quando um site diz que a chance do Brasil na Copa é $9/2$, isso também quer dizer que, para cada 2 reais apostados na vitória do nosso país, um acertador, além de receber os 2 reais de volta, receberia 9 reais. Ou seja, receberia 11 reais de prêmio para cada 2 reais apostados.

d) Em outro site de apostas, encontramos que a chance da Costa Rica na Copa é $750/1$. Quem apostar 100 reais na Costa Rica recebe quanto no total se ganhar a aposta?

Ótimo! Estamos prontos agora para entender como os sites de apostas conseguem ter lucro. Antes de começar a explicação, vale a pena notar que é normal nos sites termos chances que tem 1 como denominador, pois é uma forma mais simples de indicar quanto eu terei de lucro por real apostado se ganhar. Exemplificando, como $9/2 = 4,5/1$ para cada R\$1,00 apostado temos R\$4,50 de lucro se o Brasil for hexa (☺).

Suponha a tabela a seguir forneça as chances de cada equipe na *Ashes Cricket Series*, uma competição bienal de críquete entre Austrália e Inglaterra (vamos variar um pouco nossos esportes).

País	Chance
Austrália	0,65/1
Inglaterra	2,30/1
Empate	4,50/1

e) Quanto seria necessário apostar na Austrália, aproximadamente, para receber 100 reais no total no caso de vitória deste país? Observe que não é para ter um lucro de 100 reais, é para receber 100 reais ao todo pela aposta.

f) Se um jogador quiser garantir 100 reais no total não importando o resultado da competição, quantos reais aproximadamente ele teria que apostar ao todo? Observe que ele teria que fazer apostas na Austrália na Inglaterra e no empate para assegurar o recebimento.

Observação: esse valor é maior do que 100 reais.

Pronto! Esse exemplo reforça que os sites tomam cuidado para não ser possível ganhar dinheiro apostando em todas as possibilidades. Porém, quem sabe, se olharmos todos os sites e escolhermos os que pagam mais por cada opção? Será que é possível ter lucro assim? Isso é bem raro, mas pode acontecer e é chamada oportunidade de *arbitragem* (essa arbitragem não tem nada a ver com o juiz do futebol).

Vejamos se há uma oportunidade de arbitragem para o primeiro jogo do Brasil na Copa, contra a Sérvia. Temos, na tabela abaixo, a chance em vários sites:

Sites	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Brasil	23/50	4/9	1/2	4/9	4/9	4/9	4/9	2/5	2/5
Empate	33/10	10/3	3/1	10/3	13/4	16/5	31/10	14/5	3/1
Sérvia	26/5	6/1	6/1	6/1	59/10	6/1	11/2	5/1	11/2

g) Para cada um dos 3 resultados, identifique qual (ou quais) dos sites paga o maior valor por aposta. Para cada resultado pode haver mais de uma resposta.

h) Escolhendo os sites que pagam melhor, quantos reais, aproximadamente, seriam necessários apostar para garantir 100 reais no total, não importando o resultado do primeiro jogo do Brasil na Copa?

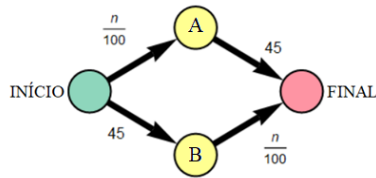
PROBLEMA 3 – Valor: 3 pontos

O *Paradoxo de Braess* é a observação de que adicionar uma ou mais vias em uma rede rodoviária pode tornar o tráfego médio mais lento. Também é verdade que se uma via for retirada o tempo médio de deslocamento pode ser menor. Esse paradoxo foi descoberto pelo matemático alemão *Dietrich Braess* em 1968.

Embora pareça contraditório (por isso é chamado de paradoxo ☺), isso já aconteceu em situações reais: em 2009 alguns trechos da Broadway, na cidade de NY, foram fechados e os congestionamentos em vias alternativas se tornaram menores. De fato, chegaram a cair 40% em alguns casos.

Veremos aqui um exemplo teórico que pode ajudar a entender a existência deste paradoxo.

Suponha que temos um fluxo constante de 4000 carros por hora indo do INÍCIO até o FINAL no diagrama a seguir. Há dois trechos que demoram 45 minutos para serem percorridos e outros dois que demoram $\frac{n}{100}$ minutos para serem percorridos, em que n é o número de carros passando naquele trecho por hora.

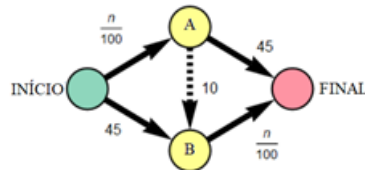


a) Se todos os 4000 carros optassem por seguir pelo caminho passando por A, qual seria o tempo médio de cada carro para ir do INÍCIO até o FINAL?

Chamamos de *equilíbrio* quando todos os caminhos possíveis têm, em média, a mesma duração. Ou seja, no nosso exemplo, os 4000 carros se dividem pelos dois caminhos (por A e por B) e demoram o mesmo tempo para ir do INÍCIO até o FINAL.

b) Suponha que a rede chega em um equilíbrio. Quantos carros passariam por A por hora? Qual seria o tempo médio de cada carro do INÍCIO até o FINAL?

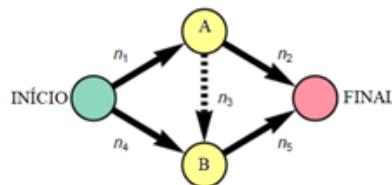
Suponha que uma nova via seja adicionada e que seja possível ir de A até B em 10 minutos.



c) Considere que 2000 carros sigam a via que vai do INÍCIO para A. Considere ainda que um único motorista dentre os 2000 siga, então, pela nova via que vai de A para B. E que, chegando em B, ele se junte aos 2000 que optaram por seguir pela via que vai do INÍCIO para B. Mostre que este motorista leva menos de 51 minutos para ir do INÍCIO até o FINAL.

Se você fez as contas direitinho nos itens anteriores, a construção da nova via parece ter sido uma excelente decisão para melhorar o trânsito. Nas próximas perguntas, o paradoxo vai aparecer.

A nova rede rodoviária terá um novo equilíbrio e teremos quantidades n_1, n_2, n_3, n_4 e n_5 passando por hora em cada trecho como mostrado na figura a seguir. (Observe que abaixo NÃO estão indicados os tempos para fazer os trajetos, como nos diagramas anteriores. Estão representados os números de carros por cada uma das vias.)



d) Nesse novo equilíbrio cada uma das três formas de ir do INÍCIO até o FINAL levará o mesmo tempo médio. Escreva expressões utilizando as variáveis n_1, n_2, n_3, n_4 e n_5 para os tempos em minutos em cada uma das três formas.

e) A partir das equações do item anterior, prove que $n_1 = n_5 = 3500$.

f) Observando que todos os carros partem do INÍCIO, obtemos que $n_1 + n_4 = 4000$. Como todos os carros que chegam por A devem sair, $n_1 = n_2 + n_3$. Escreva as equações correspondentes para B e para FINAL.

g) Levando em conta os itens d, e e f, encontre os valores de n_2, n_3 e n_4 .

h) Conclua calculando, nessa nova situação de equilíbrio, qual é o tempo médio de cada motorista do INÍCIO até o FINAL? Se tudo correu bem, aqui aparecerá o paradoxo, ou seja, apesar de ter sido construída uma nova via, o tempo médio aumenta.

PROBLEMA 4 – Valor: 3 pontos

Dizemos que um número inteiro positivo n é *fofo* se $n = a + b + c$ em que a, b e c são inteiros positivos com $a < b < c$ e tais que a é um divisor de b e b é um divisor de c . Por exemplo, 10 é um número fofo, pois $10 = 1 + 3 + 6$ e 1 é divisor de 3 e 3 é divisor de 6.

a) Determine o menor número fofo. Não se esqueça de justificar sua resposta, ou seja, você deve mostrar que tal número é fofo e os menores do que ele não são.

b) Verifique que 9, 11 e 2023 são fofos. Ou seja, para cada um desses três números encontre inteiros positivos a, b e c com $a < b < c$, tais que a é um divisor de b e b é um divisor de c , e cuja soma seja o número.

c) Quais números ímpares não são fofos? Lembre-se de justificar sua resposta.

d) Verifique que 2022 e 2024 são fofos.

e) Demonstre que se n é fofo, então $2n$ também é fofo.

f) Todo número inteiro positivo n pode ser escrito na forma $n = 2^a \cdot b$ em que a é natural e b é um número ímpar. Por exemplo: $12 = 2^2 \cdot 3$; $16 = 2^4 \cdot 1$; $5 = 2^0 \cdot 5$.

Prove que se o inteiro positivo ímpar b é fofo, a é natural e $n = 2^a \cdot b$, então n é fofo.

g) Verifique que 16 e 48 são fofos.

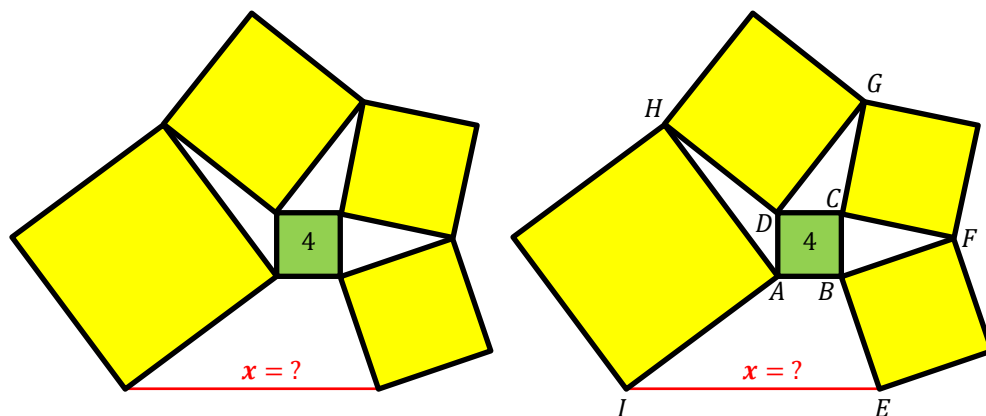
h) Determine o maior número que não é fofo. Ou seja, você deve provar que este número não é fofo e que todos os maiores do que ele são.

PROBLEMA 5 – Valor: 3 pontos

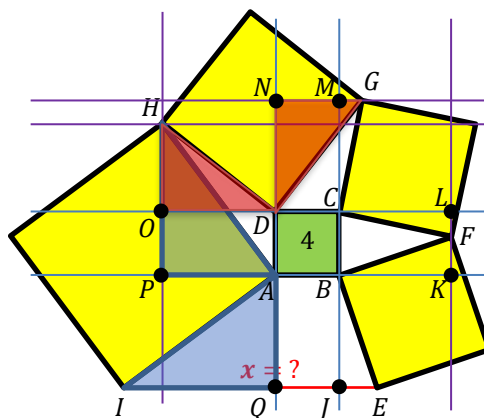
Diego Rattaggi (@diegorattaggi) é um matemático que usa o Twitter para divulgar problemas e resultados matemáticos interessantes. Vamos ver um desses problemas o qual foi postado no dia 28 de abril de 2020.

O quadrado central na figura a seguir possui área 4. Há 4 quadrados construídos ao redor do quadrado central cada um com um vértice em comum com o quadrado central e 3 outros pontos que são vértices comuns de dois desses quadrados, como podemos ver na primeira figura a seguir.

O segmento de reta ligando dois vértices inferiores de dois dos quadrados é paralelo ao lado inferior do quadrado central e possui comprimento x . Qual é o valor de x ? Calma! Veremos como calcular esse valor passo a passo! Primeiro vamos dar nomes aos pontos. O quadrado central será $ABCD$, os vértices comuns dos quadrados F , G e H e o segmento de medida x será denominado EI , com $EI \parallel AB$.



Prolongamos os lados do quadrado e traçamos retas paralelas aos lados pelos pontos F , G e H marcando os pontos J , K , L , M , N , O , P e Q como mostrado na figura a seguir.



a) Calcule o lado do quadrado $ABCD$.

b) Explique por que $m(\widehat{QAI}) = m(\widehat{PAH})$, $AI = AH$ e $m(\widehat{AIQ}) = m(\widehat{AHP})$.

Após provar as igualdades de ângulos e a de segmentos podemos concluir que os triângulos AQI e APH são congruentes pelo caso de congruência ALA.

c) Prove que os triângulos DOH e DNG são congruentes usando o caso de congruência ALA.

d) Prove que os triângulos BJE e BKF são congruentes.

e) Suponha que a medida do segmento JE é y . Prove que a medida do segmento NG é $4 - y$.

f) Determine a medida x do segmento IE .

PROBLEMA 6 – Valor: 4 pontos

Para quem gosta de problemas matemáticos é muito comum se deparar com enigmas japoneses.

Um desses enigmas consiste em particionar o conjunto dos números naturais de 1 a 60 em 30 subconjuntos de 2 números de modo que a diferença entre o maior e o menor número em cada subconjunto seja igual a 1 ou 10 a partir de alguns subconjuntos já determinados.

a) Se dois dos subconjuntos são $\{1; 11\}$ e $\{59; 60\}$ indique uma maneira de completar os 30 subconjuntos.

Listar cada subconjunto de números pode ser bastante trabalhoso e complicado. Uma forma diferente de fazer isto é representar os subconjuntos usando pares de casinhas no tabuleiro 6×10 a seguir, em que cada número natural de 1 a 60 ocupa uma casinha. Veja que o conjunto $\{1; 11\}$ pode ser representado pelo dominó vertical 1×2 no canto superior esquerdo e o conjunto $\{59; 60\}$ pelo dominó horizontal no canto inferior direito. O tabuleiro foi pintado com cores alternadas de modo que duas casinhas com um lado em comum possuam cores diferentes.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

b) Praticamente todos os subconjuntos de 2 números com diferença 1 ou 10 de $\{1, 2, \dots, 60\}$ formam dominós horizontais ou verticais no tabuleiro. Indique todos os subconjuntos que são exceção, ou seja, a diferença entre o maior e o menor número no subconjunto é 1 ou 10, porém tal par de números não forma um dominó horizontal ou vertical no tabuleiro acima.

c) Se dois conjuntos são $\{10; 11\}$ e $\{20; 30\}$, qual é o número que forma o subconjunto com o 41? Não se esqueça de que você deve justificar suas respostas.

d) Existem maneiras de determinar três subconjuntos de 2 números que tornam impossível completar a tarefa de formar os 30 subconjuntos com diferenças 1 ou 10. Indique uma dessas maneiras e explique por que é impossível formar os 30 subconjuntos.

PROBLEMA 7 – Valor: 5 pontos

Dado um número inteiro positivo n , calcule a soma dos quadrados de seus dígitos. Sendo n_1 tal soma, calcule a soma dos quadrados dos dígitos de n_1 . Sendo n_2 tal soma, calcule a soma dos quadrados dos dígitos de n_2 . E assim sucessivamente.

Dizemos que o n é um *número feliz*, se após k iterações, obtivermos $n_k = 1$. Por exemplo, o número 7 é feliz. Vejamos:

1ª Iteração: o único dígito de 7 é o próprio 7 e $7^2 = 49$.

2ª Iteração: os dígitos de 49 são 4 e 9. $4^2 + 9^2 = 97$.

3ª Iteração: os dígitos de 97 são 9 e 7. $9^2 + 7^2 = 130$.

4ª Iteração: os dígitos de 130 são 1, 3 e 0. $1^2 + 3^2 + 0^2 = 10$.

5ª Iteração: os dígitos de 10 são 1 e 0. $1^2 + 0^2 = 1$.

Demorou um pouco, mas aí está: 7 é feliz! Mas valeu a pena, pois descobrimos pelo caminho outros números felizes: 49, 97, 130 e 10. De fato, como os zeros não têm influência no resultado da soma dos quadrados, 13 também é feliz. Além do 1, é claro!

Mais ainda, a ordem dos dígitos não faz diferença, ou seja, 94, 79, 31, 301 e 3010 são exemplos de números felizes.

a) 3 é um número feliz? E o 19? 23 é?

b) Determine dois números felizes consecutivos maiores do que 2021.

Dizemos que a *altura* de um número feliz é o número de iterações para chegar a 1. Por exemplo, a altura do número feliz 7 é 5.

c) Qual é a altura do número feliz 356? E de 78999? E de 3788⁹⁷³99...9? (Observe que este último apresentado possui 977 dígitos.)

Se você não errou contas no item anterior, deve ter percebido que não é tão complicado obter números felizes cada vez de maior altura aproveitando números cuja altura é conhecida e montando números cheios de 9's para obter alguma soma de dígitos adequada.

Porém isso pode ser mais simples ainda. Pense em números formados apenas por dígitos 1. Por exemplo, 1.111.111, cuja soma dos quadrados dos dígitos é 7, é um número feliz de altura 6.

d) Explique como obter um número feliz de altura 10. Não precisa exibir o número, ele será ENORME! Apenas explique como obtê-lo.

Podemos verificar (mas não vamos fazer isso agora) que 129, 130 e 133 são números felizes. Observando que $130 - 129 = 1$ e $133 - 129 = 4$, podemos construir uma sequência de três números consecutivos felizes. Vamos ver como!

– Tomemos um número cuja soma dos quadrados dos seus dígitos é 129, e.g., 188.

– Acrescente um zero ao seu final: 1880 (Calma! Isso já vai fazer sentido.)

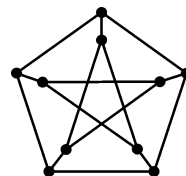
– Como as diferenças entre as somas dos números felizes originais são 1 e 4, 1880, 1881 e 1882 são três números felizes consecutivos. Te juro que, sem esse truque, isso é bem difícil de encontrar!

e) Considerando ainda que 193 (não precisa verificar) também é um número feliz, apresente quatro números felizes consecutivos.

XLVI OLIMPIÁDA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Fase Única (outubro de 2022)

Nível β (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)



www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:

- Nesta prova há 7 problemas. Você deve resolver 5 problemas.
- Caso você resolva mais de 5 problemas, sua nota é a soma das 5 maiores pontuações obtidas. Isso também vale para pontuações parciais.
- A duração da prova é de 4h30min.
- Escreva na primeira página da sua prova o horário em que você começou a prova e o horário em que você terminou a prova.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**.
- Somente serão aceitas resoluções feitas à mão, a tinta ou a lápis. Soluções digitadas em computador, por exemplo, não serão aceitas.
- Em dispositivos eletrônicos, os únicos usos permitidos são:
 - (1) leitor de arquivos somente para visualizar os enunciados;
 - (2) calculadora sem acesso à Internet.
- Não é permitido nenhum tipo de consulta, incluindo qualquer tipo de material físico (por exemplo, cadernos e livros) ou eletrônico/Internet.

PROBLEMA 1 – Valor: 2 pontos

A *Esperança Pitagórica* é uma fórmula criada por *Bill James* (historiador, estatístico e especialista em beisebol) para estimar a porcentagem de jogos que uma equipe de beisebol deveria vencer em uma temporada baseado no número de corridas que a equipe fez e quantas ela sofreu (você não precisa entender de beisebol para resolver o problema, nós mesmos da OPM não entendemos 😊 – viva a Wikipédia!):

$$\% \text{ de Vitórias} = \frac{(\text{corridas feitas})^2}{(\text{corridas feitas})^2 + (\text{corridas sofridas})^2}$$

O nome é fruto da semelhança do denominador da fórmula com o Teorema de Pitágoras.

Por exemplo, em 2012, o New York Yankees fez 804 corridas e sofreu 668 corridas. Então, de acordo com a fórmula de Bill James:

$$\% \text{ de Vitórias} = \frac{804^2}{804^2 + 668^2} = 0,5916 \dots$$

Como são 162 jogos na temporada regular, a fórmula previa $0,5916 \dots \cdot 162 \cong 96$ vitórias. De fato, foram 95 vitórias. Nada mau...

a) O New York Mets (o outro time da cidade de Nova Iorque) fez 636 e sofreu 668 corridas em 2021. Aplicando a fórmula da *Esperança Pitagórica*, qual o número de vitórias esperado para a temporada? Curiosidade: a fórmula acerta em cima. Muito bom...

b) Qual deve ser a razão entre o número de corridas feitas e o número de corridas sofridas para a fórmula prever 64% de vitórias em uma temporada?

Uma possível explicação para a fórmula segue de duas hipóteses:

- (i) o número de vitórias de uma equipe de beisebol é proporcional a sua “qualidade”;
- (ii) a “qualidade” de uma equipe pode ser medida pela razão entre o número de corridas feitas pelo número de corridas sofridas.

Por exemplo, se o time *A* fez 50 corridas e sofreu 40, sua medida de qualidade seria $\frac{50}{40} = 1,25$. A medida de qualidade para seus oponentes, considerados coletivamente, seria $\frac{40}{50} = 0,8$. Se cada equipe vence em uma quantidade proporcional à sua qualidade, a porcentagem de vitórias de *A* seria $\frac{1,25}{1,25+0,8}$.

c) Sendo n número de corridas feitas e m o número de corridas sofridas, mostre que podemos concluir pelo argumento acima que:

$$\% \text{ de Vitórias} = \frac{n^2}{n^2 + m^2}$$

Ou seja, complete a explicação para a fórmula da *Esperança Pitagórica*.

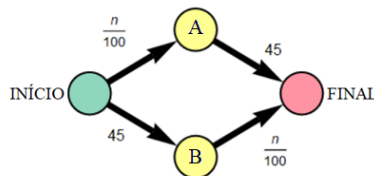
PROBLEMA 2 – Valor: 3 pontos

O *Paradoxo de Braess* é a observação de que adicionar uma ou mais vias em uma rede rodoviária pode tornar o tráfego médio mais lento. Também é verdade que se uma via for retirada o tempo médio de deslocamento pode ser menor. Esse paradoxo foi descoberto pelo matemático alemão *Dietrich Braess* em 1968.

Embora pareça contraditório (por isso é chamado de paradoxo ☺), isso já aconteceu em situações reais: em 2009 alguns trechos da Broadway, na cidade de NY, foram fechados e os congestionamentos em vias alternativas se tornaram menores. De fato, chegaram a cair 40% em alguns casos.

Veremos aqui um exemplo teórico que pode ajudar a entender a existência deste paradoxo.

Suponha que temos um fluxo constante de 4000 carros por hora indo do INÍCIO até o FINAL no diagrama a seguir. Há dois trechos que demoraram 45 minutos para serem percorridos e outros dois que demoram $\frac{n}{100}$ minutos para serem percorridos, em que n é o número de carros passando naquele trecho por hora.

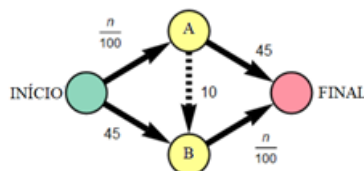


a) Se todos os 4000 carros optassem por seguir pelo caminho passando por A, qual seria o tempo médio de cada carro para ir do INÍCIO até o FINAL?

Chamamos de *equilíbrio* quando todos os caminhos possíveis têm, em média, a mesma duração. Ou seja, no nosso exemplo, os 4000 carros se dividem pelos dois caminhos (por A e por B) e demoram o mesmo tempo para ir do INÍCIO até o FINAL.

b) Suponha que a rede chega em um equilíbrio. Quantos carros passariam por A por hora? Qual seria o tempo médio de cada carro do INÍCIO até o FINAL?

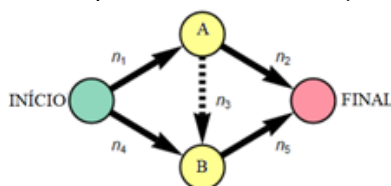
Suponha que uma nova via seja adicionada e que seja possível ir de A até B em 10 minutos.



c) Considere que 2000 carros sigam a via que vai do INÍCIO para A. Considere ainda que um único motorista dentre os 2000 siga, então, pela nova via que vai de A para B. E que, chegando em B, ele se junte aos 2000 que optaram por seguir pela via que vai do INÍCIO para B. Mostre que este motorista leva menos de 51 minutos para ir do INÍCIO até o FINAL.

Se você fez as contas direitinho nos itens anteriores, a construção da nova via parece ter sido uma excelente decisão para melhorar o trânsito. Nas próximas perguntas, o paradoxo vai aparecer.

A nova rede rodoviária terá um novo equilíbrio e teremos quantidades n_1, n_2, n_3, n_4 e n_5 passando por hora em cada trecho como mostrado na figura a seguir. (Observe que abaixo NÃO estão indicados os tempos para fazer os trajetos, como nos diagramas anteriores. Estão representados os números de carros por cada uma das vias.)



d) Nesse novo equilíbrio cada uma das três formas de ir do INÍCIO até o FINAL levará o mesmo tempo médio. Escreva expressões utilizando as variáveis n_1, n_2, n_3, n_4 e n_5 para os tempos em minutos em cada uma das três formas.

e) A partir das equações do item anterior, prove que $n_1 = n_5 = 3500$.

f) Observando que todos os carros partem do INÍCIO, obtemos que $n_1 + n_4 = 4000$. Como todos os carros que chegam por A devem sair, $n_1 = n_2 + n_3$. Escreva as equações correspondentes para B e para FINAL.

g) Levando em conta os itens d, e e f, encontre os valores de n_2, n_3 e n_4 .

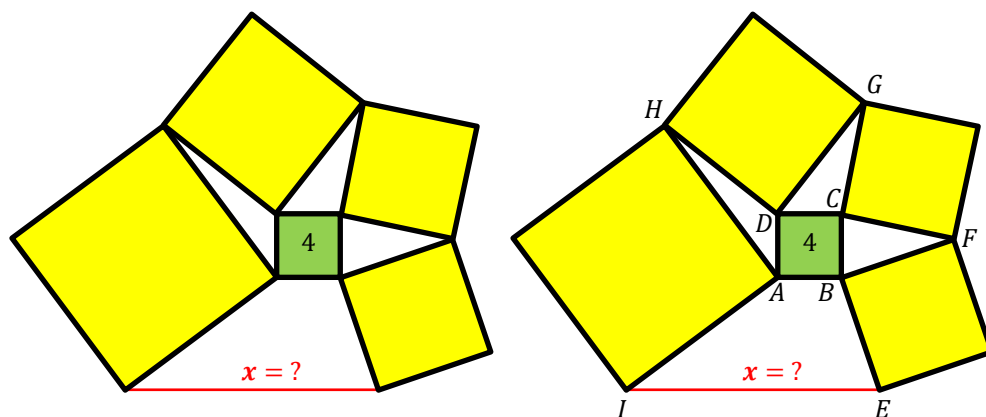
h) Conclua calculando, nessa nova situação de equilíbrio, qual é o tempo médio de cada motorista do INÍCIO até o FINAL? Se tudo correu bem, aqui aparecerá o paradoxo, ou seja, apesar de ter sido construída uma nova via, o tempo médio aumenta.

PROBLEMA 3 – Valor: 3 pontos

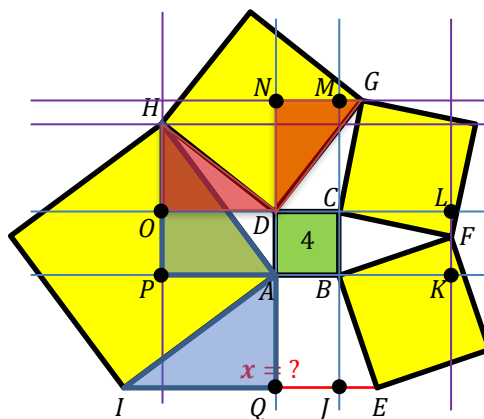
Diego Rattaggi (@diegorattaggi) é um matemático que usa o Twitter para divulgar problemas e resultados matemáticos interessantes. Vamos ver um desses problemas o qual foi postado no dia 28 de abril de 2020.

O quadrado central na figura a seguir possui área 4. Há 4 quadrados construídos ao redor do quadrado central cada um com um vértice em comum com o quadrado central e 3 outros pontos que são vértices comuns de dois desses quadrados, como podemos ver na primeira figura a seguir.

O segmento de reta ligando dois vértices inferiores de dois dos quadrados é paralelo ao lado inferior do quadrado central e possui comprimento x . Qual é o valor de x ? Calma! Veremos como calcular esse valor passo a passo! Primeiro vamos dar nomes aos pontos. O quadrado central será $ABCD$, os vértices comuns dos quadrados F , G e H e o segmento de medida x será denominado EI , com $EI \parallel AB$.



Prolongamos os lados do quadrado e traçamos retas paralelas aos lados pelos pontos F , G e H marcando os pontos J , K , L , M , N , O , P e Q como mostrado na figura a seguir.



- Calcule o lado do quadrado $ABCD$.
- Explique por que $m(\widehat{QAI}) = m(\widehat{PAH})$, $AI = AH$ e $m(\widehat{AIQ}) = m(\widehat{AHP})$.
Após provar as igualdades de ângulos e a de segmentos podemos concluir que os triângulos AQI e APH são congruentes pelo caso de congruência ALA.
- Prove que os triângulos DOH e DNG são congruentes usando o caso de congruência ALA.
- Prove que os triângulos BJE e BKF são congruentes.
- Suponha que a medida do segmento JE é y . Prove que a medida do segmento NG é $4 - y$.
- Determine a medida x do segmento IE .

PROBLEMA 4 – Valor: 3 pontos

Para n inteiro positivo, a soma dos quadrados de seus divisores positivos é denotada por $\sigma_2(n)$. Por exemplo, $\sigma_2(12) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 6^2 + 12^2 = 210$.

- Calcule $\sigma_2(40)$.

Se p e $p + 2$ são ambos números primos, dizemos que formam um par de *primos gêmeos*. Não se sabe até hoje se existem infinitos pares de primos gêmeos. É um dos mais famosos problemas em aberto da Matemática.

- Suponha que p e $p + 2$ são primos gêmeos. Sendo $n = p(p + 2)$, mostre que:

$$\sigma_2(n) = n^2 + 2n + 5.$$

- Suponha que p é primo. Sendo $n = p^2$, calcule $\sigma_2(n)$ em termos de n .

Considere agora que $n = ab$ para inteiros a e b tais que $1 < a < b < n$. Seja ainda S a soma dos quadrados dos divisores de n diferentes de 1, de a , de b e do próprio n . Então $\sigma_2(n) = 1 + a^2 + b^2 + n^2 + S$.

- Nas condições do parágrafo imediatamente acima, mostre que se $\sigma_2(n) = n^2 + 2n + 5$, então $S = 0$ e $b = a + 2$.

Dica: nesse item você pode querer utilizar que, como $(b - a)^2 > 0 \Leftrightarrow b^2 - 2ab + a^2 > 0$, vale a seguinte desigualdade

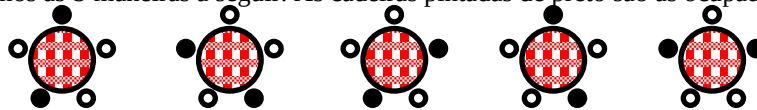
$$a^2 + b^2 > 2ab$$

- A equação $\sigma_2(n) = n^2 + 2n + 5$ possui outras soluções além de $n = p(p + 2)$ em que p e $p + 2$ formam um par de primos gêmeos? Não se esqueça de que você deve justificar as suas respostas.

PROBLEMA 5 – Valor: 4 pontos

Suponha que tenhamos uma mesa redonda com n lugares sem pessoas adjacentes e sem a possibilidade de colocar mais pessoas a não ser que duas fiquem adjacentes. Chamamos tais distribuições de *mesas cheias*.

Por exemplo, para $n = 5$, temos as 5 maneiras a seguir. As cadeiras pintadas de preto são as ocupadas.



Observe que, se colocarmos apenas uma pessoa na mesa, sempre é possível acrescentar mais uma e, portanto, a condição do problema não é satisfeita. Também podemos verificar que é impossível colocar três pessoas na mesa dentro destas condições.

Seja a_n o número de mesas cheias de n lugares. Acabamos de mostrar que $a_5 = 5$. Temos ainda que (é fácil verificar!): $a_2 = 2$, $a_3 = 3$ e $a_4 = 2$ (isso mesmo, não é 4).

a) Calcule a_6 (dica: não dá 6), a_7 , a_8 e a_9 e complete a tabela a seguir na sua folha de respostas. Não se esqueça que você deve justificar suas respostas.

a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
2	3	2	5				

Vamos provar nos próximos dois itens que a sequência a_n satisfaz uma recursão da forma:

$$a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2} + c_3 \cdot a_{n-3}$$

em que $n \geq 5$ e c_1 , c_2 e c_3 são constantes.

b) Calcule c_1 , c_2 e c_3 .

c) Prove que a_n satisfaz a recursão $a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2} + c_3 \cdot a_{n-3}$, para $n \geq 5$, com as constantes obtidas no item anterior. (Super) Dica: considere que as cadeiras têm uma numeração fixada como as mostradas abaixo para mesas cheias com, respectivamente, $n = 10$ e $n = 11$ cadeiras.

Observe que é possível, a partir dessas distribuições que satisfazem as condições do problema, obter uma regra que identifique de maneira única mesas cheias que satisfazem o problema para $n = 13$ cadeiras.



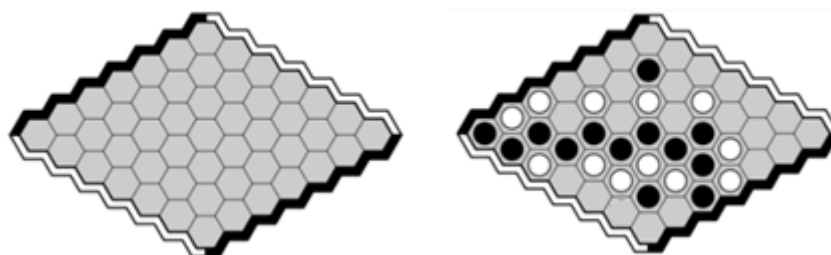
d) Calcule a_{13} e a_{17} .

PROBLEMA 6 – Valor: 4 pontos

Você já jogou Hex? Calma! Se você nunca jogou, não se preocupe. Vamos passar as informações essenciais sobre o jogo para você poder resolver este problema.

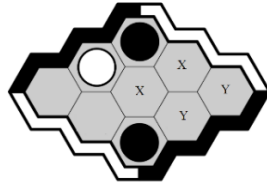
Hex é um jogo de tabuleiro jogado em uma grade hexagonal. O tamanho do tabuleiro pode variar, mas o mais comum é o 11×11 . São dois jogadores: o primeiro joga com as peças pretas e o segundo com as peças brancas. O tabuleiro possui 4 lados, dois lados opostos são pretos e os outros dois são brancos. As jogadas são alternadas e cada jogador na sua vez coloca uma peça da sua cor em um dos hexágonos que não esteja ocupado ainda. O objetivo de cada jogador é formar um caminho conectando os lados da sua cor por meio de hexágonos com peças dessa cor.

Nas figuras a seguir, temos dois tabuleiros 7×7 , no primeiro ainda não foi feita a primeira jogada e no segundo o primeiro jogador (o das peças pretas) venceu. (Verifique!)



Vamos aprender uma técnica muito útil para vencer partidas de Hex: *pareamento*. Essa técnica consiste em montar pares de casas não ocupadas do tabuleiro de modo que se o adversário joga em uma das casinhas, então o jogador usando a técnica irá jogar na outra casinha do par.

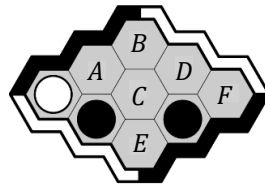
Considere, e.g., a seguinte situação após 3 jogadas.



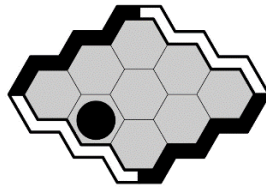
O primeiro jogador (pretas) pode garantir sua vitória usando os pareamentos X e Y . Não importa o que segundo jogador fizer, o primeiro poderá ocupar uma casa X e uma casa Y com peças pretas e vencer o jogo. Vale a pena observar que se o jogador das brancas não escolher a casa central (X) na próxima jogada, ele perde imediatamente depois.

a) Considere o tabuleiro 3×3 a seguir após 3 jogadas. É a vez do segundo jogador (peças brancas) jogar. Explique como o segundo jogador pode garantir sua vitória. Você pode indicar as casinhas das jogadas usando as letras marcadas. Pode usar tais letras também para apresentar pareamentos.

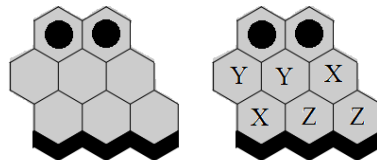
(Observe que se as pretas ocuparem as casas indicadas por E e F não temos uma vitória do primeiro jogador. Ele terá ligado os lados brancos.)



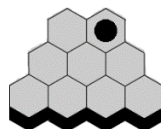
b) Considere o tabuleiro 3×3 a seguir após a primeira jogada. Mostre uma maneira de o primeiro jogador (pretas) usar pareamentos para garantir sua vitória.



Vamos deixar o 3×3 e partir para tabuleiros maiores. Para elaborar novas estratégias precisamos reconhecer que, em certas configurações, podemos garantir a conexão das pecinhas pretas com o lado preto, não importando as jogadas do adversário. Por exemplo, a configuração denominada $3 - 3 - 2$ a seguir tem conexão garantida usando os pareamentos X , Y e Z .

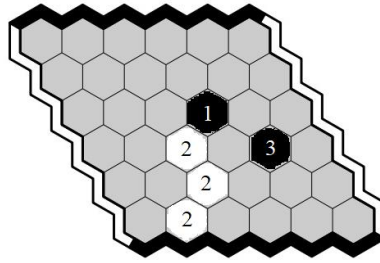


c) A configuração a seguir é chamada de $4 - 3 - 2$. Usando pareamentos, prove que esta configuração tem conexão garantida. Considere que é a vez do segundo jogador.



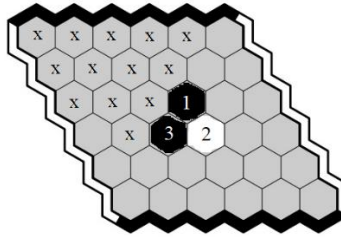
Em 1943, durante uma palestra sobre o Hex, o estudante de física *Jens Lindhard* mostrou uma estratégia completa de como o primeiro jogador pode vencer em um tabuleiro 6×6 . Para isso, ele mostrou a jogada 1 do primeiro jogador e as possíveis jogadas 3 do primeiro jogador de acordo com a jogada 2 do segundo jogador.

d) Uma dessas configurações é mostrada a seguir. O primeiro jogador joga em 1, o segundo joga em uma das casinhas marcadas com 2 e o primeiro joga na casa 3.

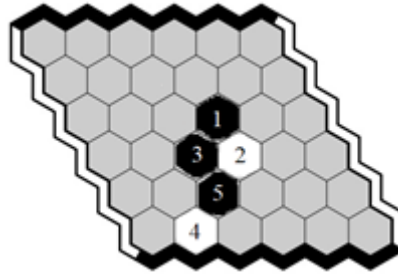


Explique por que, após a jogada na casa 3, o primeiro jogador possui estratégia vencedora.

e) Considere que outro jogo comece com as seguintes jogadas 1, 2 e 3. Suponha ainda que a jogada 4 seja em uma das casinhas marcadas com X. Utilizando pareamentos, prove que o primeiro jogador sempre consegue completar um caminho da casinha 1 até a lateral superior do tabuleiro.



Ainda usando as três jogadas iniciais do item e, suponha que o segundo jogador tente evitar a vitória do primeiro completando um caminho de 1 até a lateral inferior do tabuleiro. O segundo faz a jogada 4 e o primeiro responde com a jogada 5.



f) Demonstre que o primeiro jogador possui estratégia vencedora na configuração acima. Ou seja, que não importa quais sejam as jogadas do segundo jogador, o primeiro jogador (pretas) consegue vencer.

PROBLEMA 7 – Valor: 5 pontos

Uma das sequências mais importantes da Matemática é a *Sequência de Fibonacci*:

$$F_0 = 0; F_1 = 1 \text{ e } F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, n \geq 0.$$

Ou seja:

$$F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1; F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2; F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3; \text{ etc.}$$

Pode-se demonstrar (você não precisa fazer isso agora) que os termos da Sequência de Fibonacci podem ser dados pela *Fórmula de Binet*:

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5} (\alpha^n - \beta^n), n \geq 0.$$

Em que $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, a chamada *razão áurea*, e $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Neste problema demonstraremos uma bela identidade envolvendo os números da Sequência de Fibonacci.

a) Prove que $F_{n+1}F_{n-1} = F_n^2 + (-1)^n$, para todo $n \geq 1$.

Dica: você pode desejar utilizar a *Fórmula de Binet*. E lembre-se de que você não precisa demonstrá-la!

b) Mostre que $F_n^4 - 1 = F_{n+2}F_{n+1}F_{n-1}F_{n-2}$, para todo $n \geq 0$.

Para o próximo item considere as sequências, $n \geq 1$:

$$a_n = \frac{F_{2n+3}}{F_{n+3}F_n} \text{ e } b_n = \frac{F_{n+2}}{F_n}.$$

c) Demonstre que, $n \geq 1$:

$$b_n = a_n + \frac{1}{b_{n+1}}.$$

d) A partir do item c, conclua que:

$$b_1 = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \ddots}}}.$$

e) Calcule o valor de

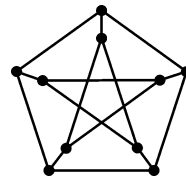
$$\frac{F_3^4 - 1}{F_7 + \frac{F_4^4 - 1}{F_9 + \frac{F_5^4 - 1}{F_{11} + \frac{F_6^4 - 1}{\ddots}}}}$$

Não se esqueça de que você deve justificar as suas respostas.

XLVI OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Fase Única (outubro de 2022)

Nível γ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)



www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:

- Nesta prova há 7 problemas. Você deve resolver 5 problemas.
- Caso você resolva mais de 5 problemas, sua nota é a soma das 5 maiores pontuações obtidas. Isso também vale para pontuações parciais.
- A duração da prova é de 4h30min.
- Escreva na primeira página da sua prova o horário em que você começou a prova e o horário em que você terminou a prova.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**.
- Somente serão aceitas resoluções feitas à mão, a tinta ou a lápis. Soluções digitadas em computador, por exemplo, não serão aceitas.
- Em dispositivos eletrônicos, os únicos usos permitidos são:
 - (1) leitor de arquivos somente para visualizar os enunciados;
 - (2) calculadora sem acesso à Internet.
- Não é permitido nenhum tipo de consulta, incluindo qualquer tipo de material físico (por exemplo, cadernos e livros) ou eletrônico/Internet.

PROBLEMA 1 – Valor: 2 pontos

A *Esperança Pitagórica* é uma fórmula criada por *Bill James* (historiador, estatístico e especialista em beisebol) para estimar a porcentagem de jogos que uma equipe de beisebol deveria vencer em uma temporada baseado no número de corridas que a equipe fez e quantas ela sofreu (você não precisa entender de beisebol para resolver o problema, nós mesmos da OPM não entendemos 😊 – viva a Wikipédia!):

$$\% \text{ de Vitórias} = \frac{(\text{corridas feitas})^2}{(\text{corridas feitas})^2 + (\text{corridas sofridas})^2}$$

O número é fruto da semelhança do denominador da fórmula com o Teorema de Pitágoras.

Por exemplo, em 2012, o New York Yankees fez 804 corridas e sofreu 668 corridas. Então, de acordo com a fórmula de Bill James:

$$\% \text{ de Vitórias} = \frac{804^2}{804^2 + 668^2} = 0,5916 \dots$$

Como são 162 jogos na temporada regular, a fórmula previa $0,5916 \dots \cdot 162 \cong 96$ vitórias. De fato, foram 95 vitórias. Nada mau...

a) O New York Mets (o outro time da cidade de Nova Iorque) fez 636 e sofreu 668 corridas em 2021. Aplicando a fórmula da *Esperança Pitagórica*, qual o número de vitórias esperado para a temporada? Curiosidade: a fórmula acerta em cima. Muito bom...

b) Qual deve ser a razão entre o número de corridas feitas e o número de corridas sofridas para a fórmula prever 64% de vitórias em uma temporada?

Analisando diversos conjuntos de dados, percebe-se que a fórmula tem um erro recorrente. Ela costuma errar por entre uma e três partidas. Para corrigir este erro, muitos estatísticos fizeram testes para determinar o expoente ideal.

A proposta mais conhecida é a fórmula de *Pythagorean* criada por *Clay Davenport* (cofundador do *Baseball Prospectus*):

$$\text{Expoente} = 1,50 \cdot \log_{10} \left(\frac{\text{corridas feitas} + \text{corridas sofridas}}{\text{jogos}} \right) + 0,45$$

Por exemplo, voltando ao Yankees de 2012:

$$\text{Expoente} = 1,50 \cdot \log_{10} \left(\frac{804 + 668}{162} \right) + 0,45 \cong 1,89$$

E, portanto:

$$\% \text{ de Vitórias} = \frac{804^{1,89}}{804^{1,89} + 668^{1,89}} = 0,586 \dots$$

Novamente, como são 162 jogos na temporada regular, a fórmula previa $0,586 \dots \cdot 162 \cong 95$. Em cheio!

A tabela a seguir mostra o número médio de corridas feitas por jogo por cada time nas últimas dez temporadas da *MLB* (*Major League Baseball* – a principal liga profissional de Beisebol dos EUA).

Ano	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
Média	4,17	4,07	4,25	4,48	4,65	4,45	4,83	4,65	4,53	4,30

c) Suponha que tivéssemos que utilizar um único expoente para todos os times da MLB em 2021. Considerando a tabela, calcule tal expoente.

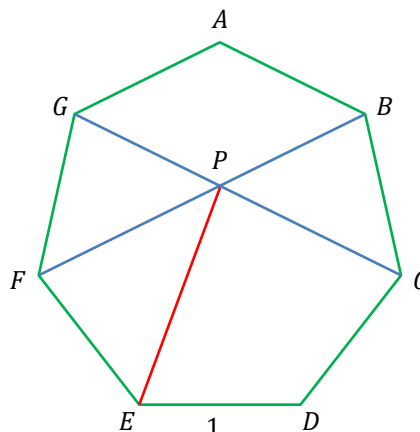
Dica: você pode querer adotar neste item que $\log_{10} 3 \cong 0,48$.

d) Quando especialistas sugerem trocar o expoente 2 por outro, os valores sugeridos sempre são menores. O valor 1,83, por exemplo, é o utilizado pelo excelente site *baseball-reference.com*

Considerando, mais uma vez, a tabela dada, justifique o porquê de os valores utilizados serem menores do que 2.

PROBLEMA 2 – Valor: 2 pontos

Um *heptágono regular* é um polígono de 7 lados congruentes e ângulos internos congruentes. Ele aparece em uma edição antiga da moeda de 25 centavos de real:



Considere um heptágono regular $ABCDEFG$ de lado 1. As diagonais $\overline{CG}$ e $\overline{BF}$ se cortam no ponto P .

- Explique por que os ângulos $\widehat{ABF}$ e $\widehat{GFB}$ possuem mesmas medidas e prove que o quadrilátero $ABFG$ é um trapézio.
- Mostre que $ABPG$ é um losango (isto é, um quadrilátero com seus quatro lados congruentes).
- Calcule as medidas dos ângulos $\widehat{GFB}$ e $\widehat{GPF}$, em radianos.
- Mostre que $FP = 2 \cos \frac{2\pi}{7}$.
- Prove que $PE^2 = 1 - 8 \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}$.
- Mostre que $\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} = -\frac{1}{8}$ e conclua que $PE = \sqrt{2}$.

Dica: $\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}}{2 \sin \frac{\pi}{7}}$ e os fatos listados a seguir.

- Um polígono regular com n lados tem ângulos internos de medida $\frac{(n-2)\pi}{n}$ radianos;
- Em um triângulo com lados a, b, c e ângulo θ entre a e b , vale a lei dos cossenos: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$.
- $\cos(\pi - x) = \cos(\pi + x) = -\cos x$
- $\sin(\pi + x) = -\sin x$
- $2 \cos a \cos b = \cos(a + b) + \cos(a - b)$
- $2 \sin x \cos x = \sin 2x$

PROBLEMA 3 – Valor: 3 pontos

O *Farkle* é um jogo de dados para duas ou mais pessoas. Em cada rodada todas jogam. São utilizados seis dados e o jogo acaba na rodada em que alguém atingir 10.000 pontos. Uma vez que alguém termine sua vez com 10.000 pontos, as demais pessoas que não jogaram ainda na rodada têm uma última chance de pontuar. Vence quem tiver mais pontos. Os pontos são atribuídos seguindo a tabela a seguir.

Tipo de Pontuação	Pontos
1's (até um par)	100 para cada 1 obtido
5's (até um par)	50 para cada 5 obtido
Terno de 1's (1, 1, 1)	300
Terno de x 's (três x 's, $x \neq 1$)	$100 \cdot x$
Quadra (quatro números iguais)	1000
Quina (cinco números iguais)	2000
Sena (seis números iguais)	3000
Sequência (1, 2, 3, 4, 5, 6)	1500
Três pares	1500
Quadra e par	1500
Duas ternas	2500

Cada jogador começa sua vez jogando todos os seis dados. Ele deve então retirar qualquer subconjunto de dados que valham alguma pontuação e acrescentar tal pontuação ao seu total na rodada. Os dados não envolvidos na pontuação podem ser lançados novamente. E assim sucessivamente.

Se não há pontuação possível, dizemos que ele lançou um *Farkle* e a rodada acaba para ele. Neste caso, ele perde todos os pontos obtidos na rodada, ou seja, sua pontuação na rodada é 0 (zero). Caso contrário, ao terminar de utilizar todos os dados em pontuações, ele acumula os pontos obtidos ao seu total no jogo.

O jogador tem a opção de parar em qualquer momento em seus lançamentos e acrescentar os pontos obtidos até então na rodada ao seu total no jogo.¹

Complicado? Vejamos um exemplo.

Esmeralda começa sua primeira rodada lançando      . Esse resultado produz quatro dados que levam a pontuações: um terno de 's e um . Assim, Esmeralda tem as seguintes opções para continuar sua rodada:

- Retirar o terno de 's para obter $100 \cdot 4 = 400$ pontos e parar;
- Retirar o terno de 's para obter $100 \cdot 4 = 400$ pontos e lançar os outros três dados;
- Retirar o  para obter 50 pontos e parar;
- Retirar o  para obter 50 pontos e lançar os outros cinco dados;
- Retirar os quatro dados     para obter 450 pontos e parar;
- Retirar os quatro dados     para obter 450 pontos e lançar os outros dois dados.

Esmeralda decide pela última opção, que é retirar os quatro dados     e lança os dois dados restantes. Ela obtém  . Não há pontuação possível, ou seja, Esmeralda lançou um *Farkle*. Com isso, ela perde os 450 pontos e sua rodada termina. Esmeralda obtém 0 ponto nessa rodada.

a) Seja p_n a probabilidade de lançar um *Farkle* com n dados. Calcule p_1 , p_2 , p_3 e p_6 .

Na sua vez, Jade decide jogar seus dois dados restantes mais uma vez e colocar em risco os T pontos que obteve na rodada, e em seguida terminar sua rodada, independentemente do resultado.

b) A tabela a seguir exibe os possíveis resultados para o lançamento de dois dados de Jade. Preencha a tabela com as possíveis pontuações finais de Jade, em função de T . Preenchemos um valor para você: se Jade obtiver dois 's, sua pontuação final da rodada é $T + 200$.

						
	$T + 200$					
						
						
						
						
						

c) Obtenha, em termos de T , o valor esperado para o número de pontos obtidos por Jade na rodada após o lançamento dos dois dados.

Neste item você talvez queira utilizar a fórmula do valor esperado.

Seja X o número total de pontos acumulados na rodada após lançar os dois dados restantes, o valor esperado $E(X)$ é dado pelo somatório dos produtos das pontuações possíveis de serem atingidas pelas probabilidades daqueles resultados ocorrerem. Por exemplo, se forem obtidos dois 's, Jade ganha mais 200 pontos. E a probabilidade de se obter dois 's é $\frac{1}{36}$. Logo um dos termos deste somatório é $(T + 200) \cdot \frac{1}{36}$.

d) Determine o valor de T para o qual $E(X) = T$.

e) Qual conselho você daria para um jogador com T pontos que está pensando em jogar mais uma vez seus últimos dois dados e terminar sua rodada?

PROBLEMA 4 – Valor: 3 pontos

Além de resolver problemas, a capacidade de elaborar problemas novos, as chamadas *conjecturas*, cuja busca da resolução leve ao desenvolvimento da Ciência é uma das habilidades mais importantes que um matemático pode possuir. Um dos maiores elaboradores de conjecturas que propiciaram a criação de novas áreas e técnicas da Matemática atual foi o húngaro *Paul Erdős* (26/03/1913 – 20/09/1996). Trataremos neste problema de uma de suas conjecturas envolvendo uma *equação Diofantina*: equações que procuramos soluções inteiras.

¹ Existe uma regra que envolve uma pontuação mínima de 500 pontos para começar a pontuação, mas ela não será relevante nesse problema.

Erdős propôs a questão de se a equação Diofantina $x^x y^y = z^z$ possuía soluções além das triviais $x = 1$ e $y = z$; $y = 1$ e $x = z$. Chao Ko encontrou infinitas soluções sendo uma delas (aquela com menores valores para as variáveis) com $x = 12^6$ e $y = 6^8$.

a) Determine a fatoração em primos de z para x e y dados acima.

Claude Anderson conjecturou que a equação Diofantina $w^w x^x y^y = z^z$ não possuía soluções com $1 < w < x < y < z$, mas Chao Ko desta vez em colaboração com Sun Qi descobriu uma infinidade de contraexemplos para a generalização da conjectura para um número qualquer de variáveis, ou seja, para a equação $x_1^{x_1} x_2^{x_2} x_3^{x_3} \cdots x_k^{x_k} = z^z$ em que $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ e z são inteiros positivos.

b) Sabendo que $w = 3^{12} 2^6$, $x = 3^{13} 2^5$ e $y = 3^{14} 2^4$ determine z na equação $w^w x^x y^y = z^z$. Por que esta solução mostra que a conjectura de Anderson é falsa?

No página 266 do maravilhoso livro *Unsolved Problems in Number Theory* de Richard K. Guy (3ª Edição, 2010), as soluções de Chao Ko e Sun Ki são apresentadas como segue:

$$\begin{aligned} x_1 &= k^{k^n(k^{n+1}-2n-k)+2n}(k^n-1)^{2(k^n-1)} \\ x_2 &= k^{k^n(k^{n+1}-2n-k)}(k^n-1)^{2(k^n-1)+2} \\ x_3 &= \cdots = x_k = k^{k^n(k^{n+1}-2n-k)+n}(k^n-1)^{2(k^n-1)+1} \\ z &= k^{k^n(k^{n+1}-2n-k)+n+1} \end{aligned}$$

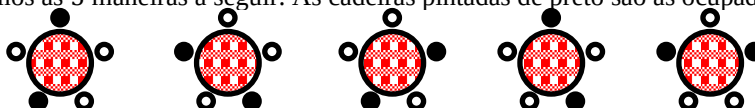
c) Alguma coisa parece estranha com o z , não é? De fato, falta um pedaço na fórmula do z (acontece com os melhores autores!): falta um fator da forma $(k^n - 1)^M$, ou seja, o valor correto de z é $z = k^{k^n(k^{n+1}-2n-k)+n+1}(k^n - 1)^M$, para algum M inteiro positivo. Encontre a fórmula para M . Não se esqueça de que você deve justificar as suas respostas.

d) Mostre que existem infinitos contraexemplos para a conjectura de Anderson.

PROBLEMA 5 – Valor: 4 pontos

Suponha que tenhamos uma mesa redonda com n lugares sem pessoas adjacentes e sem a possibilidade de colocar mais pessoas a não ser que duas fiquem adjacentes. Chamamos tais distribuições de *mesas cheias*.

Por exemplo, para $n = 5$, temos as 5 maneiras a seguir. As cadeiras pintadas de preto são as ocupadas.



Observe que, se colocarmos apenas uma pessoa na mesa, sempre é possível acrescentar mais uma e, portanto, a condição do problema não é satisfeita. Também podemos verificar que é impossível colocar três pessoas na mesa dentro destas condições.

Seja a_n o número de mesas cheias de n lugares. Acabamos de mostrar que $a_5 = 5$. Temos ainda que (é fácil verificar!): $a_2 = 2$, $a_3 = 3$ e $a_4 = 2$ (isso mesmo, não é 4).

a) Calcule a_6 (dica: não dá 6), a_7 , a_8 e a_9 e complete a tabela a seguir na sua folha de respostas. Não se esqueça que você deve justificar suas respostas.

a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
2	3	2	5				

Vamos provar nos próximos dois itens que a sequência a_n satisfaz uma recursão da forma:

$$a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2} + c_3 \cdot a_{n-3}$$

em que $n \geq 5$ e c_1 , c_2 e c_3 são constantes.

b) Calcule c_1 , c_2 e c_3 .

c) Prove que a_n satisfaz a recursão $a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2} + c_3 \cdot a_{n-3}$, para $n \geq 5$, com as constantes obtidas no item anterior. (Super) Dica: considere que as cadeiras têm uma numeração fixada como as mostradas abaixo para mesas cheias com, respectivamente, $n = 10$ e $n = 11$ cadeiras.

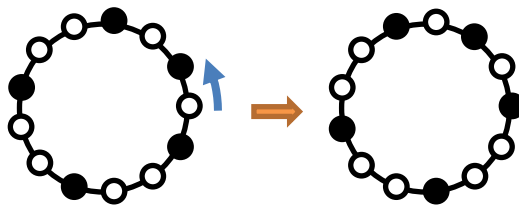
Observe que é possível, a partir dessas distribuições que satisfazem as condições do problema, obter uma regra que identifique de maneira única mesas cheias que satisfazem o problema para $n = 13$ cadeiras.



d) Calcule a_{13} e a_{17} .

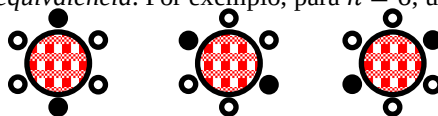
Se você não errou nenhuma conta (#facaadica), pode observar que sempre que temos um número primo p , então a_p é um múltiplo de p . Iremos concluir esta questão demonstrando tal fato.

Considere as cadeiras numeradas como vimos na figura acima. Dizemos que duas maneiras de ocupar as mesas nas condições do problema são *rotacionalmente equivalentes* se uma pode ser obtida a partir da outra por uma rotação. Por exemplo, as duas maneiras a seguir são rotacionalmente equivalentes.



Consideramos que toda mesa cheia é rotacionalmente equivalente a ela mesma. É fácil ver que se uma mesa cheia é rotacionalmente equivalente a uma segunda mesa cheia, também é válido que a segunda é equivalente à primeira. Finalmente, se uma mesa cheia é equivalente a uma segunda e esta segunda é equivalente a uma terceira, então a primeira é rotacionalmente equivalente à terceira.

Com estes três fatos pode-se demonstrar – você não precisará fazer isso agora – que o conjunto formado pelas mesas cheias com n lugares é particionado (isto é, dividido em subconjuntos disjuntos) por conjuntos de mesas cheias rotacionalmente equivalentes. Tais conjuntos são chamados de *classes de equivalência*. Por exemplo, para $n = 6$, uma das classes de equivalência é:



Observe que tal classe de equivalência contém três mesas cheias distintas com 6 lugares.

e) Apresente todas as classes de equivalência das mesas cheias com 8 lugares.

f) Prove que se alguma classe de equivalência do conjunto das mesas cheias com p lugares, p primo, tem k elementos, $1 \leq k < p$, então existe uma mesa cheia que é rotacionalmente equivalente a ela rotacionada em apenas um lugar, ou seja, as posições de cadeiras ocupadas não se alteram se a cadeira 1 é colocada na posição da cadeira 2; a cadeira 2 é colocada na posição da cadeira 3; a 3 na da 4; ...; a da $p - 1$ na da p e a p na da 1.

g) Conclua que para todo primo p , a_p é um múltiplo de p .

Curiosidade: não vale a volta, ou seja, se a_n é um múltiplo de n , não podemos concluir que n é primo. Números compostos n tais que a_n é um múltiplo de n são chamados de *pseudoprimos de Perrin*. Tais números são raros, mas são infinitos. Os menores pseudoprimos de Perrin são 271441, 904631, 16532714, 24658561, 27422714, 27664033. Para saber mais, veja:

<https://oeis.org/A013998>

<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022314X10000120?via%3Dihub>

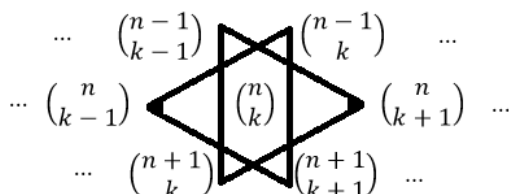
PROBLEMA 6 – Valor: 4 pontos

O Triângulo de Pascal é uma forma muito famosa e útil de apresentar os números binomiais $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. A partir de $n = 0$, apresentamos na linha n os binomiais $\binom{n}{k}$ para $0 \leq k \leq n$. A seguir temos as cinco primeiras linhas do Triângulo de Pascal.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\
 \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
 & & & & \dots & & & &
 \end{array}$$

Nesse problema veremos algumas propriedades dos números binomiais envolvendo suas posições no Triângulo de Pascal.

Para inteiros positivos $1 \leq k < n$ considere alguns termos em três linhas consecutivas do Triângulo de Pascal. Vamos considerar um “triângulo” com vértices em $B_1 = \binom{n-1}{k-1}$, $B_3 = \binom{n}{k+1}$ e $B_5 = \binom{n+1}{k}$ e outro com vértices em $B_2 = \binom{n-1}{k}$, $B_4 = \binom{n+1}{k+1}$ e $B_6 = \binom{n}{k-1}$. Os dois triângulos juntos formam uma estrela de seis pontas similar à famosa estrela de Davi.



a) Prove que $B_1 \cdot B_3 \cdot B_5 = B_2 \cdot B_4 \cdot B_6$.

Nos próximos itens vamos provar o *Teorema de Gould*. Ele diz que o máximo divisor comum (mdc) dos três “vértices” de um triângulo é igual ao mdc dos vértices do outro, ou seja:

$$\text{mdc}(B_1, B_3, B_5) = \text{mdc}(B_2, B_4, B_6)$$

Para cada primo positivo p chamaremos de $v_p(n)$ o expoente de p na fatoração do inteiro positivo n como produto de potências de primos. Por exemplo, $v_2(20) = 2$, $v_2(27) = 0$ e $v_3(27) = 3$. Observe que nos inteiros positivos $m = n \Leftrightarrow v_p(m) = v_p(n)$ para todo primo p .

Para o próximo item considere um primo p fixado.

b) Prove que se $v_p(x) < v_p(y)$, então $v_p(x + y) = v_p(x)$. Prove também que se $v_p(x) = v_p(y)$, então $v_p(x + y) \geq v_p(x)$.

Uma consequência imediata dos resultados do item b é que entre os três valores $v_p(x)$, $v_p(y)$ e $v_p(x + y)$ o valor mínimo acontece duas ou três vezes. Não existe um deles que é estritamente menor que os outros dois.

Seja $B_0 = \binom{n}{k}$ e, para cada $i = 0, 1, \dots, 6$, seja e_i o valor de $v_p(B_i)$.

c) Explique por que $e_1 + e_3 + e_5 = e_2 + e_4 + e_6$.

d) Suponha que $e_1 < \min(e_2, e_4, e_6)$. Prove que $e_1 = e_0$.

e) Ainda de acordo com a hipótese do item d, prove que $e_5 = e_3 = e_1 = e_0$.

f) Prove que o resultado do item e gera uma contradição com o resultado do item c. Ou seja, demonstre que $e_1 \geq \min(e_2, e_4, e_6)$.

g) Conclua a demonstração do Teorema de Gould, ou seja, prove que vale a igualdades dos mdc's:

$$\text{mdc}(B_1, B_3, B_5) = \text{mdc}(B_2, B_4, B_6)$$

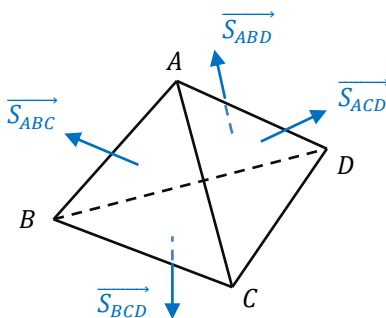
PROBLEMA 7 – Valor: 5 pontos

Uma maneira de descrever área que é bastante utilizada em cálculo é utilizar *vetores*. De modo informal, um vetor é uma flecha que pode ser transladada livremente. Todo vetor tem direção, sentido e comprimento. Os vetores possuem operações próprias. Por exemplo, para somar $\vec{x}$ e $\vec{y}$ devemos colocar o começo de um no final do outro e o vetor soma $\vec{x} + \vec{y}$ vai do começo do primeiro até o final do segundo como mostrado na figura a seguir.



Existem outras operações importantes com vetores como veremos neste problema.

No caso particular de áreas de faces de sólidos, podemos definir o *vetor área* como o vetor que tem comprimento numericamente igual à área da face, direção perpendicular à face e sentido apontando para o exterior do sólido. A seguir, representamos um tetraedro $ABCD$ e seus quatro vetores de área $\vec{v}_d = \vec{S}_{ABC}$, $\vec{v}_c = \vec{S}_{ABD}$, $\vec{v}_b = \vec{S}_{ACD}$ e $\vec{v}_a = \vec{S}_{BCD}$. Os comprimentos dos vetores são as áreas das faces ABC , ABD , ACD e BCD , respectivamente.



Tetraedros têm uma propriedade bastante interessante:

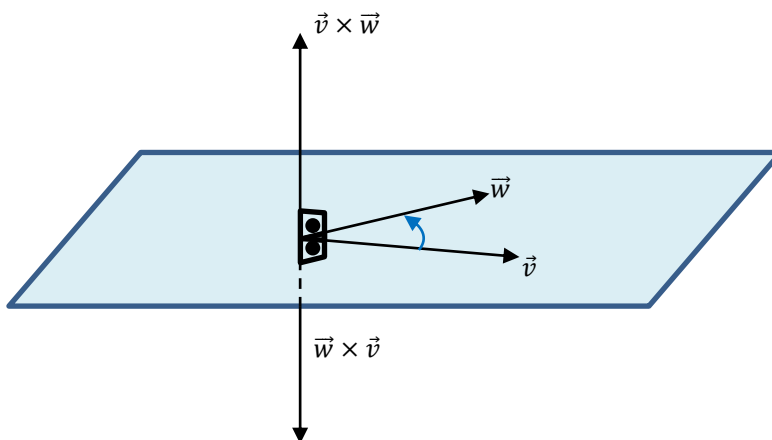
Propriedade T: Sejam $\vec{v}_a, \vec{v}_b, \vec{v}_c, \vec{v}_d$ vetores de área de comprimentos a, b, c, d , respectivamente, não todos no mesmo plano. Então existe um tetraedro com exatamente esses 4 vetores de área se, e somente se, $\vec{v}_a + \vec{v}_b + \vec{v}_c + \vec{v}_d = \vec{0}$ (vetor nulo que tem comprimento zero). Além disso, o tetraedro é único a menos de translação.

Vamos demonstrar essa propriedade e usá-la para provar um resultado geométrico bem bacana. Qual? Continue a ler!

A demonstração da propriedade T exige dois passos: um é provar que, em cada tetraedro a soma de seus vetores de área é o vetor nulo (ou seja, $\vec{v}_a + \vec{v}_b + \vec{v}_c + \vec{v}_d = \vec{0}$) e o outro é provar que, dados os vetores de área $\vec{v}_a, \vec{v}_b, \vec{v}_c, \vec{v}_d$ não coplanares com $\vec{v}_a + \vec{v}_b + \vec{v}_c + \vec{v}_d = \vec{0}$, é possível construir um único tetraedro com esses vetores de área.

Para a primeira tarefa, vamos usar o conceito de *produto vetorial*, que calcula essencialmente o vetor área: o produto vetorial de dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$, denotado por $\vec{v} \times \vec{w}$, é o vetor perpendicular ao plano determinado por $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e comprimento igual à área do paralelogramo determinado por $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Note que, pela nossa definição, se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ estão na mesma direção, a área do paralelogramo relevante é zero, e o produto vetorial é o vetor nulo.

O sentido é determinado pela ordem entre $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Imagine os dois vetores no plano horizontal; se ao girar de $\vec{v}$ para $\vec{w}$ vamos no sentido anti-horário, então $\vec{v} \times \vec{w}$ aponta para cima; caso contrário, então $\vec{v} \times \vec{w}$ aponta para baixo. Por isso, se trocarmos a ordem dos vetores, o sentido do produto vetorial é trocado, ou seja, $\vec{w} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{w}$.



Assim, no tetraedro $ABCD$ na figura, $\vec{v}_a = \vec{S}_{BCD} = \frac{1}{2} \vec{BD} \times \vec{BC}$, $\vec{v}_b = \vec{S}_{ACD} = \frac{1}{2} \vec{AC} \times \vec{AD}$, e assim por diante. Note que a ordem em que os vetores são colocados é relevante.

O produto vetorial tem as seguintes propriedades:

- $\vec{v} \times (-\vec{w}) = -\vec{v} \times \vec{w}$
- $\vec{v} \times (\vec{w} + \vec{u}) = \vec{v} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{u}$; em particular, $\vec{PQ} \times \vec{XZ} = \vec{PQ} \times (\vec{XY} + \vec{YZ}) = \vec{PQ} \times \vec{XY} + \vec{PQ} \times \vec{YZ}$.
- $(\vec{w} + \vec{u}) \times \vec{v} = \vec{w} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{v}$

a) Mostre que no tetraedro $ABCD$, $\vec{v}_a + \vec{v}_b + \vec{v}_c + \vec{v}_d = \vec{0}$, ou seja, $\vec{S}_{BCD} + \vec{S}_{ACD} + \vec{S}_{ABD} + \vec{S}_{ABC} = \vec{0}$.

A segunda tarefa, que é mostrar a existência de um único tetraedro, usa vetores e... matrizes! Antes, começamos com um novo ingrediente, que é o conceito de *produto escalar* entre dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$, denotado por $\vec{v} \cdot \vec{w}$. O produto escalar é igual a $vw \cos \theta$, em que v e w são os comprimentos de $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e θ é o ângulo entre esses dois vetores. Observe que, como $\cos 90^\circ = 0$, $\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \cos \theta = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$.

b) Mostre que $\vec{BA} \cdot \vec{S}_{BCD} = -3V$, em que V é o volume de $ABCD$.

Para achar o único tetraedro, usamos um sistema de coordenadas com 3 eixos perpendiculares dois a dois. Escolhemos um ponto de referência para ser a *origem* do sistema, ou seja, o $(0,0,0)$. Em sistemas de coordenadas no espaço, associamos a cada vetor $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ três coordenadas reais v_1, v_2, v_3 indicando que o vetor $\vec{v}$ pode ser posicionado do ponto $(0,0,0)$ até o ponto (v_1, v_2, v_3) .

Usando coordenadas, os cálculos dos produtos vetorial e escalar de $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ são:

- $\vec{v} \times \vec{w} = (v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1)$. Uma maneira talvez mais fácil de lembrar é usar determinantes:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$
- $\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$.

Agora, considere um tetraedro $ABCD$. Escolha o sistema de coordenadas de modo que A é a origem. Vamos associar a cada tetraedro uma matriz M , cujas colunas são as coordenadas dos vetores $\vec{x}_b = \vec{AB}$, $\vec{x}_c = \vec{AC}$ e $\vec{x}_d = \vec{AD}$, e orientamos B , C e D de modo que $\det(M) > 0$. Nossa meta é encontrar, a partir dos vetores área $\vec{v}_a$, $\vec{v}_b$, $\vec{v}_c$ e $\vec{v}_d$ cuja soma é o vetor nulo, os vetores $\vec{x}_b$, $\vec{x}_c$ e $\vec{x}_d$.

c) Prove que $\det(M)$ é igual a 6 vezes o volume de $ABCD$.

Dada uma matriz quadrada M , existe uma matriz $\text{adj}(M)$, denominada *adjunta* de M , tal que

$$\text{adj}(M) \cdot M = \det(M) \cdot I,$$

em que I é a matriz identidade.

Sejam $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ e $\vec{u}_3$ os vetores cujas coordenadas são as linhas de $\text{adj}(M)$.

d) Mostre que, sendo $i \neq j$ índices entre b, c e d , $\vec{u}_i \cdot \vec{x}_j = 0$, ou seja, $\vec{u}_i \perp \vec{x}_j$, e conclua que $\vec{u}_i$ é paralelo a $\vec{v}_i$.

e) Mostre que $\vec{u}_i \cdot \vec{x}_i = 6V$ para $i \in \{b, c, d\}$. Lembre-se: V é o volume do tetraedro. Conclua que $\vec{u}_i = -2\vec{v}_i$ para cada $i \in \{b, c, d\}$.

f) Nos dois itens anteriores mostramos que $\text{adj}(M)$ é diretamente obtida de $\vec{v}_b$, $\vec{v}_c$ e $\vec{v}_d$. Mostre que $\det(\text{adj}(M)) = (\det(M))^2$ e, consequentemente, que $M = (\text{adj}(M))^{-1} \sqrt{\det(\text{adj}(M))}$.

g) Mostre que $\vec{v}_b$, $\vec{v}_c$ e $\vec{v}_d$ determinam unicamente o tetraedro com vetores área $\vec{v}_b$, $\vec{v}_c$, $\vec{v}_d$ e $\vec{v}_a = -\vec{v}_b - \vec{v}_c - \vec{v}_d$.

h) Seja $ABCD$ um tetraedro cujas áreas de ABC e ABD são iguais a S_1 e cujas áreas de ACD e BCD são iguais a S_2 . Defina $\vec{v} = \vec{S}_{ABC} + \vec{S}_{ABD}$. Considere a rotação de 180° em torno de $\vec{v}$. Mostre que essa rotação transforma $ABCD$ em um tetraedro congruente a $ABCD$ e que os triângulos ABC e ABD são congruentes (não necessariamente nessa ordem dos vértices), assim como os triângulos ACD e BCD .