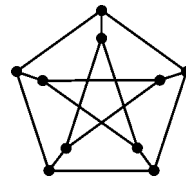


XLVII OLIMPIÁDA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Fase Única (setembro de 2023)

Nível α (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)



www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:

- Nesta prova há 7 problemas. Você deve resolver 5 problemas.
- Caso você resolva mais de 5 problemas, sua nota é a soma das 5 maiores pontuações obtidas. Isso também vale para pontuações parciais.
- A duração da prova é de 4h30min.
- Escreva na primeira página da sua prova o horário em que você começou a prova e o horário em que você terminou a prova.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**.
- Somente serão aceitas resoluções feitas à mão, a tinta ou a lápis. Soluções digitadas em computador, por exemplo, não serão aceitas.
- Em dispositivos eletrônicos, os únicos usos permitidos são:
 - (1) leitor de arquivos somente para visualizar os enunciados;
 - (2) calculadora sem acesso à Internet.
- Não é permitido nenhum tipo de consulta, incluindo qualquer tipo de material físico (por exemplo, cadernos e livros) ou eletrônico/Internet.

PROBLEMA 1 – Valor: 2 pontos

Em agosto de 2023, foi lançada a série *live action* do mangá One Piece. A nova série dividiu os fãs entre aqueles que gostaram da adaptação e os que acreditam que a série não consegue passar as mesmas emoções que o mangá e o anime. Digamos que você conheceu One Piece por meio do *live action* e quer decidir por si mesmo se o anime é melhor. Neste problema vamos estimar quanto tempo você teria de investir para assistir a todos os episódios já lançados da famosa série.

- a) O primeiro episódio do anime de One Piece foi lançado em 20 de outubro de 1999, há praticamente 24 anos. Atualmente o anime já está no episódio 1075 (no momento em que essa questão está sendo escrita). Considerando que foi lançado no máximo um episódio por semana até o episódio 1075, qual é o percentual aproximado de semanas em que os fãs tiveram um episódio novo para assistir?
- b) Suponha que cada episódio do anime de One Piece tem 24 minutos, aproximadamente quantos dias seriam necessários para reproduzir todos os episódios desse anime um após o outro?
- c) Não é possível ficar dias apenas assistindo ao anime (Que pena!), então vamos ver uma forma mais realista para uma pessoa assistir a todos os episódios.

Suponha que, dos 24 minutos de cada episódio, há 4 minutos de abertura, encerramento e resumos de outros episódios. Considere uma pessoa que diariamente dorme 8 horas, faz sua higiene e se alimenta em 3 horas e trabalha (ou estuda) 8 horas de segunda a sexta. Se essa pessoa apenas assistir a One Piece no resto do tempo - pulando abertura, encerramento e resumos - quantos dias, aproximadamente, ela vai demorar para ver tudo?

PROBLEMA 2 – Valor: 3 pontos

Costumamos utilizar para representar os números a chamada *base dez* (ou *decimal*), ou seja, quando representamos um número, cada dígito da direita para a esquerda corresponde a uma quantidade de potências de dez que chamamos, respectivamente, de unidades, dezenas, centenas, milhares, dezenas de milhares etc. Por exemplo, $2023 = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$, isto é, 3 unidades, 2 dezenas, 0 centena e 2 milhares.

É fácil calcular o resto que um número na base dez deixa na sua divisão por 9. Nos próximos itens, vamos aprender a fazer isso e resolver uma questão bem legal.

- a) Como é a representação decimal de um número da forma $10^n - 1$, para $n \geq 1$? Justifique por que todos os números desta forma são divisíveis por 9.
- b) Mostre que um número menos a soma de seus dígitos é sempre divisível por 9. Por exemplo, $2023 - (2 + 0 + 2 + 3) = 2016 = 9 \cdot 224$. (O item a pode ser muito útil aqui!)

A partir do item b, podemos concluir que um número deixa o mesmo resto na divisão por 9 que a soma de seus dígitos. Exemplificando: para calcular o resto de 11.234.567.890 na divisão por 9, podemos calcular $1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 0 = 46$ e, como 46 deixa resto 1 na divisão por 9, 11.234.567.890 também deixa resto 1 na divisão por 9. Com efeito, com o auxílio de uma calculadora, obtemos $11.234.567.890 = 9 \cdot 1.248.285.321 + 1$.

- c) Sabe-se que o número 2^{29} possui 9 dígitos todos distintos. Sem calcular este número, prove que se pode garantir que o dígito zero aparece na sua representação na base dez. *Não vale calcular o número neste item!*

PROBLEMA 3 – Valor: 3 pontos

Penn Jillette e Teller (isso mesmo, o nome completo é só Teller) formam a consagrada dupla de mágicos/comediantes Penn & Teller. Muitos de seus truques envolvem ideias matemáticas interessantes e eles têm a prática de explicar alguns deles.

Há vários anos, a dupla apresenta uma série chamada *Penn & Teller: Fool Us*, na qual mágicos e ilusionistas do mundo todo tentam apresentar truques que eles não consigam desvendar. Os vencedores do programa recebem um troféu e são convidados para apresentar a mágica em dos shows de Penn & Teller em Las Vegas. A série faz muito sucesso e já está na sua nona temporada.

Um dos vencedores do programa foi Hans Petter Secker da Noruega. A *Matemágica* envolvida é simples e a explicaremos neste problema.

No show que foi ao ar em 19 de novembro de 2021, Penn e Teller contaram com a colaboração da atriz Alyson Hannigan. Hans estava online da Noruega. Penn, Teller e Alyson sentaram-se ao redor de uma caixa enviada por ele para uso na mágica.

Hans pediu que abrissem a caixa e que cada um dos três pegasse um item. Penn pegou uma pedra (💎); Teller, uma tesoura (✂️); e Alyson pegou um pedaço de papel amassado (📄). Eles iriam brincar de *Pedra, Papel e Tesoura*! Lembre-se que, na brincadeira, pedra ganha de tesoura, tesoura ganha de papel e papel ganha de pedra.



Figura 1

Para a primeira parte do truque, Hans diz que dois deles irão trocar seus objetos, mas antes de que isso ocorra ele irá escrever uma previsão em seu caderno. Após escrever sua previsão, ele pede que Alyson escolha qual par fará a troca. Ela escolhe a si mesma e Penn, como vemos na figura 2.

Troca	Penn	Teller	Alyson
0	💎	✂️	📄
1	📄	✂️	💎

Figura 2

Hans revela então sua previsão: Teller vencerá Penn. E acerta! Tesoura ganha de papel.

Para a segunda parte do truque, Hans diz que agora eles poderão fazer duas trocas e escreve novamente sua previsão no caderno. Alyson e Penn trocam novamente e depois Alyson troca com Teller, como mostra a figura 3.

Troca	Penn	Teller	Alyson
1	📄	✂️	💎
2	💎	✂️	📄
3	💎	📄	✂️

Figura 3

Hans revela sua previsão: Alyson vencerá Teller e Penn vencerá Alyson. Certo de novo!

Para a parte final do truque, Hans diz que agora serão três trocas. Desta vez Penn e Teller trocam pedra e tesoura três vezes em sequência. Como na figura 4.

Troca	Penn	Teller	Alyson
3	💎	📄	✂️
4	📄	💎	✂️
5	💎	📄	✂️



Figura 4

Depois das trocas, Hans diz que a sua previsão final está no papel amassado que ele enviou da Noruega e agora está com Penn. Penn desamassa o papel e lá está: Teller ganhará de Alyson, Penn ganhará de Teller e Alyson ganhará de Penn. Impressionante!!!

Impressionante? Veremos que não muito nos próximos itens.

a) De quantas maneiras os objetos podem ser distribuídos entre os três apresentadores?

b) A resposta do item anterior é um dos motivos para ficarmos impressionados. São várias possibilidades. Porém as previsões de Hans são sobre quem vence quem, não envolvem os objetos.

Desta forma, quantas previsões são possíveis? Ou seja, considerando todas as possibilidades do item anterior, há quantas maneiras de preencher com os nomes de Penn e Teller a frase:

Alyson vence ____; ____ vence Alyson; e ____ vence ____.

(Observe que Alyson não pode vencer os dois.)

c) O que acontece com a frase acima quando fazemos uma troca de objetos?

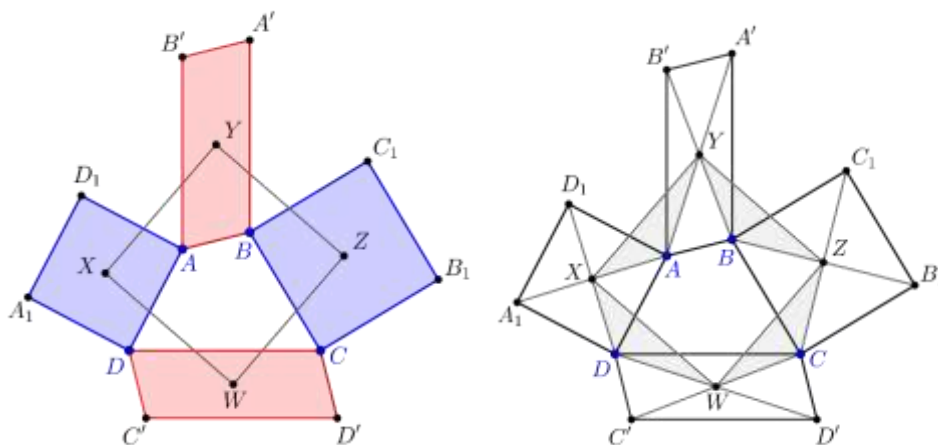
d) Explique o truque de Hans.

e) Suponha que a na terceira parte fossem feitas 2023 trocas – é chato, eu sei, mas imagine isso – o truque continuaria dando certo? Não se esqueça de que você deve justificar sua resposta.

PROBLEMA 4 – Valor: 3 pontos

O famoso Teorema de Napoleão foi publicado pela primeira vez em 1825 e afirma que se construirmos triângulos equiláteros externamente sobre os lados de um triângulo qualquer, então o triângulo formado pelos centros dos três triângulos equiláteros também é equilátero. Você pode estudar mais sobre o Teorema de Napoleão na OPM 2016. Existem muitas tentativas de obter resultados similares ao Teorema de Napoleão para quadriláteros. Neste problema vamos estudar um desses teoremas, o qual foi proposto por Quang Hung Tran do Vietnã.

Seja $ABCD$ um quadrilátero com ângulos internos menores que 180° e satisfazendo as seguintes condições: $\angle A + \angle D > 90^\circ$ e $\angle B + \angle C > 90^\circ$. Sobre os lados AD e BC construímos quadrados ADA_1D_1 e BCB_1C_1 externamente a $ABCD$. Sobre os lados AB e CD construímos paralelogramos $ABA'B'$ e $CDC'D'$ também externamente ao quadrilátero de modo que AB' tem mesmo comprimento e é perpendicular a CD e de modo que CD' tem mesmo comprimento e é perpendicular a AB . Então os centros X , Y , Z e W dos quatro quadriláteros (encontros das respectivas diagonais) são vértices de um quadrado. Vamos provar este teorema por meio dos itens a seguir.



a) Prove as seguintes igualdades de segmentos e de ângulos $A'B = D'C'$, $A'B' = D'C$, $\angle ABA' = \angle DC'D'$ e $\angle BA'B' = \angle C'D'C$.

Dica: você pode utilizar que um paralelogramo possui lados opostos paralelos e de mesma medida.

Daqui em diante vamos usar que os paralelogramos $ABA'B'$ e $DC'D'C$ (usando essas ordens de vértices) são congruentes e possuem lados e ângulos com as mesmas medidas.

b) Prove que $\angle D_1AB' = \angle ADC$.

c) Prove que os triângulos XAY e XDW são congruentes.

d) Prove que $\angle WXY = 90^\circ$.

e) Conclua a demonstração de que $XYZW$ é um quadrado.

PROBLEMA 5 – Valor: 4 pontos

Uma jarra A tem inicialmente 1000 mililitros de suco e uma jarra B (em que cabem mais de 1000 mililitros) está inicialmente vazia.

A cada minuto, Esmeralda despeja 10% do conteúdo de A em B e, em seguida, despeja 10% do conteúdo de B em A . Assim, no primeiro minuto, A fica com $1000(1 - 10\%) = 900$ mililitros de suco e B fica com $0 + 10\% \cdot 1000 = 100$ mililitros e, em seguida, B fica com $(1 - 10\%)100 = 90$ mililitros e A fica com $900 + 10\% \cdot 100 = 910$ mililitros. Em resumo, A passa de 1000 mililitros para 910 mililitros e B passa de 0 para 90 mililitros.

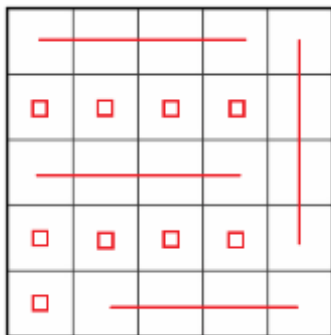
Estamos interessados em saber o que acontece no longo prazo. A jarra A vai ficar perto de se esvaziar completamente? Ou será que vai ficar perto de alguma quantidade diferente de zero de suco?

- Quantos mililitros de suco as jarra A e B têm no segundo minuto?
- Após uma certa quantidade de minutos completados, A tem a mililitros de suco e B tem b mililitros de suco. Determine quantos mililitros de suco A e B terão após o próximo minuto completado.
- Considere a expressão $9(\text{mililitros de suco na jarra } A) - 10(\text{mililitros de suco na jarra } B)$. No momento em que A tem a mililitros de suco e B tem b mililitros de suco, tal conta é $x = 9a - 10b$. Calcule, em termos de x , o valor da expressão após o próximo minuto completado.
- O que acontece com o valor $9(\text{mililitros de suco na jarra } A) - 10(\text{mililitros de suco na jarra } B)$ após passar muito tempo?
- Após passar muito tempo, as quantidades de suco nas jarra A e B vão ficar bem próximas de certos valores fixados. Encontre esses valores.

PROBLEMA 6 – Valor: 4 pontos

Os problemas de cobertura são muito comuns nas competições de Matemática e têm aplicações relevantes na Física e nas Artes. Vamos estudar o número de maneiras de cobrir um tabuleiro 5×5 dividido em quadradinhos 1×1 usando pecinhas 1×1 que cobrem exatamente um quadradinho e peças 1×4 que cobrem exatamente 4 quadradinhos na horizontal ou na vertical. É importante destacar que cada quadradinho deve ser coberto por exatamente uma pecinha e que as peças 1×4 não podem sair fora do tabuleiro.

Para organizar a contagem vamos considerar que h é o número de peças 1×4 na horizontal e que v é o número de peças 1×4 na vertical. Na figura a seguir, temos uma representação simplificada de uma cobertura em que $h = 3$ e $v = 1$. Observe que só precisamos contar as maneiras de colocar as peças 1×4 , pois os quadradinhos que sobram serão cobertos de exatamente uma maneira pelas pecinhas 1×1 . Por exemplo, se $h = 0$ e $v = 0$, então há uma única maneira de cobrir o tabuleiro apenas com tais pecinhas.



Considere que as linhas e colunas são numeradas de 1 a 5 de cima para baixo e da esquerda para a direita. No nosso exemplo temos 3 peças horizontais nas linhas 1, 3 e 5 e uma peça vertical na coluna 5.

- Explique por que não pode haver, ao mesmo tempo, peça horizontal em uma das linhas 2 ou 3 ou 4 e peça vertical em uma das linhas 2 ou 3 ou 4.
- Existem quantas maneiras de cobrir o tabuleiro com $h \geq 2$ e $v \geq 2$?
- Existem quantas maneiras de cobrir o tabuleiro com $h = 1$ e $v = 1$?
- Existem quantas maneiras de cobrir o tabuleiro com $h = 0$ e $v \geq 1$?
- Existem quantas maneiras de cobrir o tabuleiro com $h = 1$ e $v \geq 2$?
- Agora podemos concluir o problema proposto inicialmente. Existem quantas maneiras de cobrir o tabuleiro 5×5 usando pecinhas 1×1 e peças 1×4 ?

PROBLEMA 7 – Valor: 5 pontos

O matemático G.H. Hardy em seu famoso ensaio *A Mathematician's Apology* destaca dois números que, de certa maneira, “invertem-se”: 1089 e 2178. De fato, $9 \times 1089 = 9081$ e $4 \times 2178 = 8712$ que são os mesmos números só que lidos da direita para a esquerda.

Seja n um inteiro maior do que 1. Diremos que um número inteiro positivo A é um n -flip se, e somente se, $n \cdot A$ é igual a A quando lido da direita para a esquerda. Logo, 1089 é um 9-flip e 2178 é um 4-flip. Neste problema iremos determinar todos os n para os quais existem n -flips.

É imediato que não existem 10-flips, 100-flips etc. Não consideramos zeros à esquerda.

a) Existem n -flips para $n \geq 11$? Não se esqueça de que você deve justificar as suas respostas.

Vamos mostrar que não existem 8-flips.

Observe que se um número A fosse um 8-flip ele teria de começar com o dígito 1 pois, caso contrário, $8A$ teria mais dígitos do que A e, portanto, não poderia ser igual a A lido da direita para a esquerda.

Por outro lado, sendo 1 o primeiro dígito de A , $8A$ terminaria em 1 e seria um número par. Impossível.

Logo não existe um número 8-flip.

O mesmo argumento, mudando o que deve ser mudado, demonstra que não existem 6-flips.

b) Adapte o argumento anterior para provar que não existem 5-flips.

c) Prove que não existem 7-flips.

Vamos mostrar que não existem 3-flips.

Um número A que fosse um 3-flip teria de começar com 1, 2 ou 3 pois, caso contrário, $3A$ teria mais dígitos do que A e, portanto, não poderia ser igual a A lido da direita para a esquerda.

Temos alguns casos a considerar agora:

- Sendo 1 o primeiro dígito de A , $3A$ terminaria em 1. Só que para $3A$ terminar em 1, A teria de terminar em 7 ($3 \cdot 7 = 21$). Ou seja, $3A$ começaria com o dígito 7. Lembrando que o primeiro dígito de A é 1, observamos que isso é impossível: o primeiro dígito de $3A$ é menor do que 6.
- Sendo 2 o primeiro dígito de A , $3A$ terminaria em 2. Só que para $3A$ terminar em 2, A teria de terminar em 4 ($3 \cdot 4 = 12$). Ou seja, $3A$ começaria com o dígito 4. Lembrando que o primeiro dígito de A é 2, observamos que isso é impossível: o primeiro dígito de $3A$ é maior do que 6.
- Sendo 3 o primeiro dígito de A , $3A$ terminaria em 3. Só que para $3A$ terminar em 3, A teria de terminar em 1 ($3 \cdot 1 = 3$). Ou seja, $3A$ começaria com o dígito 1 e seria menor do que A . Impossível.

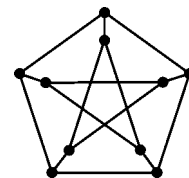
d) Prove que não existem 2-flips.

e) Sabemos agora que existem apenas 9-flips e 4-flips. Mostre que existem infinitos números que são 9-flips e infinitos números que são 4-flips.

XLVII OLIMPIÁDA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Fase Única (setembro de 2023)

Nível β (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)



www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

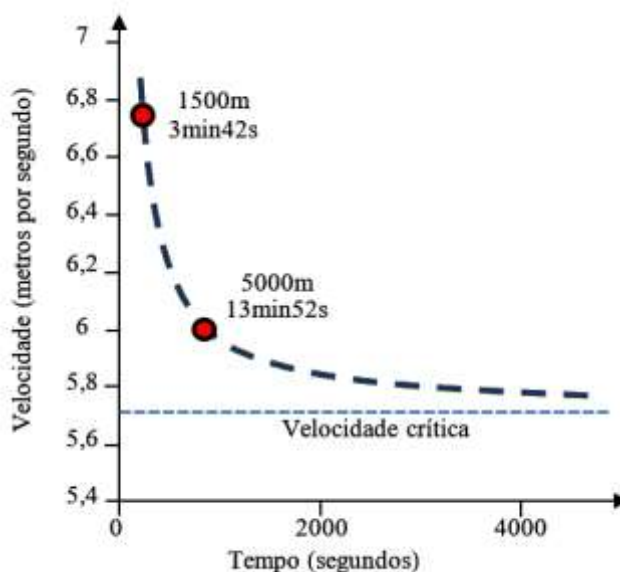
Instruções:

- Nesta prova há 7 problemas. Você deve resolver 5 problemas.
- Caso você resolva mais de 5 problemas, sua nota é a soma das 5 maiores pontuações obtidas. Isso também vale para pontuações parciais.
- A duração da prova é de 4h30min.
- Escreva na primeira página da sua prova o horário em que você começou a prova e o horário em que você terminou a prova.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**.
- Somente serão aceitas resoluções feitas à mão, a tinta ou a lápis. Soluções digitadas em computador, por exemplo, não serão aceitas.
- Em dispositivos eletrônicos, os únicos usos permitidos são:
 - (1) leitor de arquivos somente para visualizar os enunciados;
 - (2) calculadora sem acesso à Internet.
- Não é permitido nenhum tipo de consulta, incluindo qualquer tipo de material físico (por exemplo, cadernos e livros) ou eletrônico/Internet.

PROBLEMA 1 – Valor: 2 pontos

Neste problema vamos estudar um modo de prever quanto tempo uma pessoa levaria para correr uma maratona a partir de seus melhores desempenhos em corridas de média e longa distâncias, como 1500 m e 5000 m.

Considere o gráfico a seguir em que o eixo horizontal indica o tempo em segundos e o eixo vertical representa a velocidade em metros por segundo. Temos duas informações sobre certo (excelente!) corredor: ele consegue correr 1500 m em 3 minutos e 42 segundos e consegue correr 5000 m em 13 minutos e 52 segundos. Segundo a pesquisa, publicada no *Medicine & Science in Sports & Exercise*, de Barry Smyth do College Dublin e Daniel Muniz-Palmars da Universidade de Hertfordshire, a partir desses dados podemos estimar a curva de corrida dele - linha tracejada - que relaciona cada velocidade v com o tempo máximo t que o corredor pode correr com aquela velocidade.



a) Suponha que a equação da curva de corrida seja da forma $v = \frac{a}{t} + b$, em que a e b são constantes. Usando as duas informações do corredor, estime os valores de a e b .

O valor de b é numericamente igual à *velocidade crítica* do corredor. Teoricamente seria possível para o corredor correr para sempre com essa velocidade b . Infelizmente, na prática isso não é verdade, pois há outros fatores ligados à fadiga para se considerar. Por outro lado, a pesquisa aponta também que em média um corredor consegue correr uma maratona (de 42,2 km) com velocidade média igual a 85% da sua velocidade crítica.

b) Para o corredor que estamos analisando, quanto é 85% de sua velocidade crítica em km/h ?

c) Quanto tempo (em horas e minutos) aproximadamente esse corredor demoraria para completar uma maratona com a velocidade do item anterior?

d) Agora vamos estudar outro corredor. O norueguês campeão olímpico Jakob Ingebrigtsen, possui tempos de 3 minutos e 27 segundos nos 1500 m e de 12 minutos e 49 segundos nos 5000 m. Suponha que a equação da curva de corrida de Ingebrigtsen também seja da forma $v = \frac{a}{t} + b$. Suponha também que, por ser um atleta profissional, ele consiga correr uma maratona com velocidade média igual a 96% de sua velocidade crítica.

O recorde mundial de tempo da maratona é do atleta queniano Eliud Kipchoge que terminou a maratona de Berlim de 2022 em 2 horas, 1 minuto e 9 segundos. Considerando a estimativa sugerida pelo parágrafo anterior, Jakob bateria o recorde mundial?

PROBLEMA 2 – Valor: 3 pontos

Penn Jillette e Teller (isso mesmo, o nome completo é só Teller) formam a consagrada dupla de mágicos/comediantes *Penn & Teller*. Muitos de seus truques envolvem ideias matemáticas interessantes e eles têm a prática de explicar alguns deles.

Há vários anos, a dupla apresenta uma série chamada *Penn & Teller: Fool Us*, na qual mágicos e ilusionistas do mundo todo tentam apresentar truques que eles não consigam desvendar. Os vencedores do programa recebem um troféu e são convidados para apresentar a mágica em dos shows de *Penn & Teller* em Las Vegas. A série faz muito sucesso e já está na sua nona temporada.

Um dos vencedores do programa foi Hans Petter Secker da Noruega. A *Matemágica* envolvida é simples e a explicaremos neste problema.

No show que foi ao ar em 19 de novembro de 2021, Penn e Teller contaram com a colaboração da atriz Alyson Hannigan. Hans estava online da Noruega. Penn, Teller e Alyson sentaram-se ao redor de uma caixa enviada por ele para uso na mágica.

Hans pediu que abrissem a caixa e que cada um dos três pegasse um item. Penn pegou uma pedra (💎); Teller, uma tesoura (✂️); e Alyson pegou um pedaço de papel amassado (📄). Eles iriam brincar de *Pedra, Papel e Tesoura*! Lembre-se que, na brincadeira, pedra ganha de tesoura, tesoura ganha de papel e papel ganha de pedra.



Figura 1

Para a primeira parte do truque, Hans diz que dois deles irão trocar seus objetos, mas antes de que isso ocorra ele irá escrever uma previsão em seu caderno. Após escrever sua previsão, ele pede que Alyson escolha qual par fará a troca. Ela escolhe a si mesma e Penn, como vemos na figura 2.

Troca	Penn	Teller	Alyson
0	💎	✂️	📄
1	📄	✂️	💎

Figura 2

Hans revela então sua previsão: Teller vencerá Penn. E acerta! Tesoura ganha de papel.

Para a segunda parte do truque, Hans diz que agora eles poderão fazer duas trocas e escreve novamente sua previsão no caderno. Alyson e Penn trocam novamente e depois Alyson troca com Teller, como mostra a figura 3.

Troca	Penn	Teller	Alyson
1	📄	✂️	💎
2	💎	✂️	📄
3	💎	📄	✂️

Figura 3

Hans revela sua previsão: Alyson vencerá Teller e Penn vencerá Alyson. Certo de novo!

Para a parte final do truque, Hans diz que agora serão três trocas. Desta vez Penn e Teller trocam pedra e tesoura três vezes em sequência. Como na figura 4.

Troca	Penn	Teller	Alyson
3	💎	📄	✂️

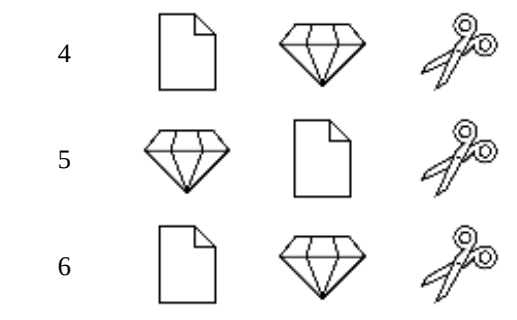


Figura 4

Depois das trocas, Hans diz que a sua previsão final está no papel amassado que ele enviou da Noruega e agora está com Penn. Penn desamassa o papel e lá está: Teller ganhará de Alyson, Penn ganhará de Teller e Alyson ganhará de Penn. Impressionante!!!

Impressionante? Veremos que não muito nos próximos itens.

a) De quantas maneiras os objetos podem ser distribuídos entre os três apresentadores?

b) A resposta do item anterior é um dos motivos para ficarmos impressionados. São várias possibilidades. Porém as previsões de Hans são sobre quem vence quem, não envolvem os objetos.

Desta forma, quantas previsões são possíveis? Ou seja, considerando todas as possibilidades do item anterior, há quantas maneiras de preencher com os nomes de Penn e Teller a frase:

Alyson vence ____; ____ vence Alyson; e ____ vence ____.

(Observe que Alyson não pode vencer os dois.)

c) O que acontece com a frase acima quando fazemos uma troca de objetos?

d) Explique o truque de Hans.

e) Suponha que a na terceira parte fossem feitas 2023 trocas – é chato, eu sei, mas imagine isso – o truque continuaria dando certo? Não se esqueça de que você deve justificar sua resposta.

PROBLEMA 3 – Valor: 3 pontos

Considere um triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b e c . Dizemos que a , b e c formam uma *terna pitagórica* quando todos esses três números são inteiros positivos. Por exemplo, 3, 4 e 5 formam uma terna pitagórica, assim como 5, 12 e 13, mas 1, $\sqrt{3}$ e 2 não formam uma terna pitagórica, pois $\sqrt{3}$ não é inteiro.

Agora vamos ver a equação do segundo grau $x^2 - ax + S = 0$ (*), em que S é a área do triângulo retângulo e a é a medida da sua hipotenusa.

Por exemplo, para o triângulo 3 – 4 – 5 temos $S = \frac{3 \cdot 4}{2}$ e a equação fica $x^2 - 5x + 6 = 0$. Suas raízes são 2 e 3, dois inteiros!

Para o triângulo 5 – 12 – 13 temos $S = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30$ e a equação fica $x^2 - 13x + 30 = 0$. Suas raízes são 3 e 10, dois inteiros de novo! Será que é sempre assim?

a) Calcule, em termos de b e c , o discriminante Δ da equação (*).

b) Ache, em termos de a , b e c , as raízes da equação (*).

c) Prove que $(a + b + c)^2$ é par e conclua que $a + b + c$ também é par.

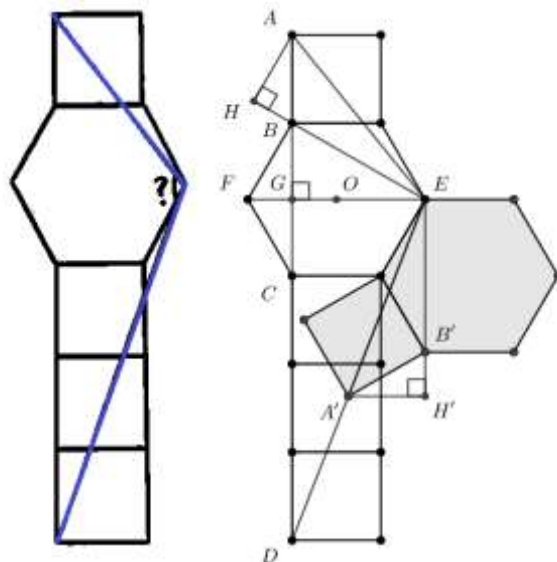
d) Se tudo deu certo, você encontrou como raízes no item b duas frações com 2 no denominador. Mostre que o numerador dessas frações é par, e conclua que as duas raízes da equação (*) são sempre inteiras.

Você pode querer usar o fato de que as soluções da equação $Ax^2 + Bx + C = 0$, com $A \neq 0$, são $\frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A}$ e $\frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2A}$, com $\Delta = B^2 - 4AC$, se $\Delta \geq 0$. Se $\Delta < 0$, a equação não tem soluções reais.

PROBLEMA 4 – Valor: 3 pontos

Como na OPM 2020, vamos resolver um problema que apareceu no Twitter. Desta vez, proposto por duas pessoas: a (nossa já conhecida) professora Catriona Agg e o matemático Ben Zuazmer (@BensOscarMath), autor do livro *Oscarmetrics: The Math Behind the Biggest Night in Hollywood* que relaciona dados estatísticos com a premiação do Oscar.

Na primeira figura a seguir temos um hexágono regular e 4 quadrados congruentes. Qual é a medida do ângulo mostrado na figura da esquerda com uma interrogação? Não precisa responder agora. Vamos considerar a segunda figura. Demos nomes a alguns pontos para poder provar fatos geométricos.



a) Prove que os pontos A , B , C e D são colineares. Você não pode dizer que isto é óbvio da figura. Mostre que os ângulos $\widehat{ABC}$ e $\widehat{BCD}$ são iguais a 180° .

Dica: você pode querer utilizar que todo hexágono regular pode ser recortado em seis triângulos equiláteros de mesmo lado ligando o centro a cada um dos vértices.

Para fazer algumas contas, vamos chamar de $2x$ as medidas dos lados dos quadrados. Seja G o ponto sobre o lado BC tal que EG é perpendicular a BC . É fácil observar que E , G , O e F são colineares.

b) Calcule as medidas dos segmentos GA , GE e GD em função de x .

A reta perpendicular a reta EB pelo ponto A encontra a reta EB no ponto H .

c) Calcule as medidas dos ângulos do triângulo ABH .

d) Prove que os triângulos EHA e DGE são semelhantes.

O hexágono e o quadrado de cima são rotacionados em torno do ponto E de modo que o lado superior que contém o ponto E seja levado ao lado inferior que contém o ponto E . Os pontos A , B e H são levados em A' , B' e H' respectivamente. Veja na figura o hexágono e o quadrado cinzas.

e) Prove que os pontos E , A' e D são colineares.

f) Responda a pergunta inicial do problema, ou seja, qual é a medida do ângulo marcado com “?” na primeira figura?

PROBLEMA 5 – Valor: 4 pontos

O matemático G.H. Hardy em seu famoso ensaio *A Mathematician's Apology* destaca dois números que, de certa maneira, “invertem-se”: 1089 e 2178. De fato, $9 \times 1089 = 9801$ e $4 \times 2178 = 8712$ que são os mesmos números só que lidos da direita para a esquerda. Neste problema, aprenderemos a determinar todos os números com tal propriedade e veremos uma conexão da quantidade de tais números com uma sequência muito famosa.

Seja n um inteiro maior do que 1. Diremos que um número inteiro positivo A é um n -flip se, e somente se, $n \cdot A$ é igual a A quando lido da direita para a esquerda. Logo, 1089 é um 9-flip e 2178 é um 4-flip. Neste problema iremos determinar todos os 9-flips.

É tentador tentar atacar o problema diretamente para obter todos os 9-flips. Mas uma observação esperta nos livra de trabalho desnecessário. Observe que temos dois 9-flips até agora: 1089 e o 0, se ampliarmos a nossa definição para inclui-lo, o que faremos neste momento. Então, justapondo 0s e 1089s podemos criar infinitos 9-flips. Sejam $A = 1089$ e $B = 0$ e considere palíndromos – expressões que são iguais quando lidas da esquerda para a direita e da direita para a esquerda – formados por A s e B s. Por exemplo, um palíndromo é $AABABABAA$ que corresponde ao número **108910890108901089010891089**.

Multiplicando este número por 9, seus dígitos são “invertidos”:

$$\begin{array}{r} 108910890108901089010891089 \\ \times 9 \\ \hline 980198010980109801098019801 \end{array}$$

a) Prove que se α é um 9-flip e β é um 9-flip, todos os números correspondentes a palíndromos formados por α s e β s são 9-flips.

Assim, para terminar todos os 9-flips, basta encontrar todos aqueles que não têm a propriedade de serem iguais a palíndromos de outros 9-flips. Chamaremos tais números de *9-flips básicos*.

b) Pode-se demonstrar que, além do zero, os 9-flips básicos são todos os números da forma $10 \underbrace{9 \dots 9}_{n \text{ 9s}} 89$ em que n é um número natural (0 é natural!). Demonstre que o único 9-flip básico com 6 dígitos é 109989.

Seja a_n a quantidade de 9-flips com n algarismos. Sabemos, por exemplo, que $a_4 = a_5 = 1$ pois o número 1089 é o único 9-flip com 4 algarismos e 10989 é o único 9-flip com 5 algarismos.

Para obter uma fórmula muito interessante para a_n , vamos recordar que todo 9-flip ou é um 9-flip básico ou é um palíndromo composto por 9-flips básicos. Por exemplo, 1089010998901089 e 10998910890000001089109989 correspondem, respectivamente aos palíndromos $ABCBA$ e $CABBBBBAC$ em que $A = 1089$, $B = 0$ e $C = 109989$ são 9-flips básicos. Vamos separar os 9-flips entre aqueles formados por um número par de 9-flips básicos e aqueles formados por um número ímpar. Exemplificando, como 1089010998901089 é formado por 5 9-flips básicos e 10998910890000001089109989 é formado por 10 9-flips básicos, estes números pertencem a conjuntos diferentes de 9-flips. Sejam p_n e i_n , respectivamente, as quantidades de 9-flips compostos por quantidades pares e ímpares de 9-flips básicos.

c) Mostre que se retiramos o algarismo central de um 9-flip com um número ímpar de dígitos, o número resultante também é um 9-flip.

d) Prove que $a_{2k} = a_{2k+1}$, para $k \geq 2$.

e) Prove que $p_{2k} = p_{2k-2} + i_{2k-4}$, para $k \geq 2$.

f) Demonstre que, para $k \geq 2$, $a_{2k} = a_{2k-2} + a_{2k-4}$. Conclua que $a_{2k} = F_{k-1}$, em que F_n é a famosa *sequência de Fibonacci*. Você pode querer utilizar que a sequência de Fibonacci é definida por $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ e

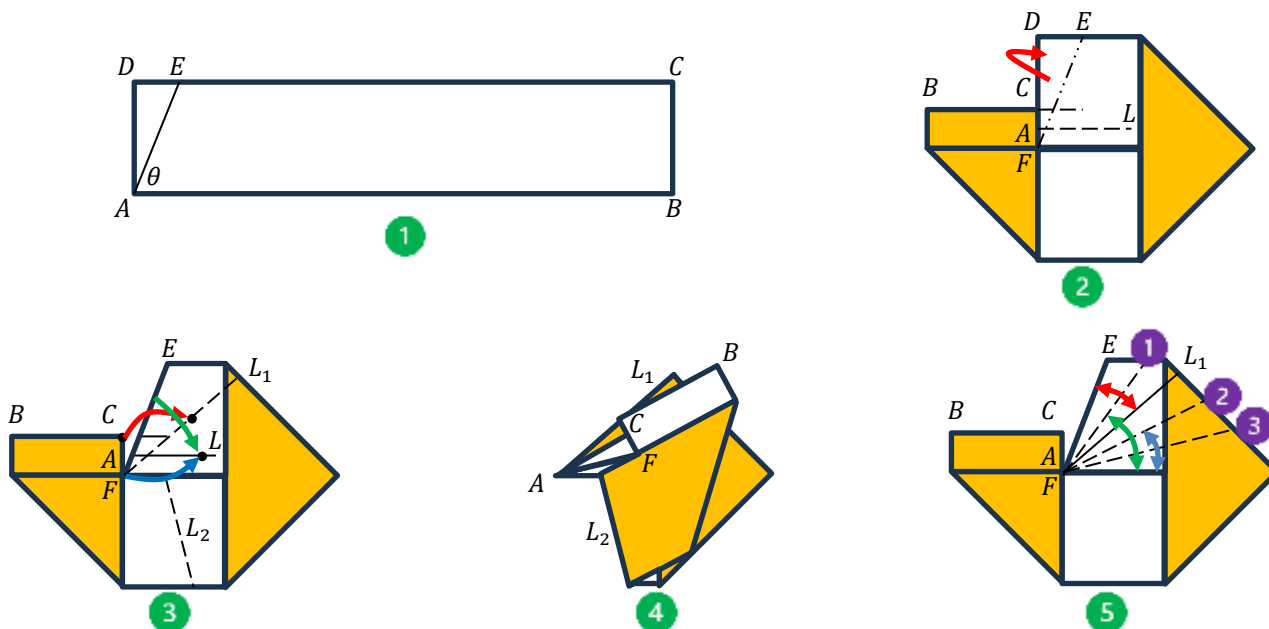
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 2.$$

PROBLEMA 6 – Valor: 4 pontos

As dobraduras, além de serem fonte de entretenimento e arte, nos fornecem também uma matemática bastante rica, tanto que existem matemáticos que pesquisam ativamente a matemática por trás das dobraduras.

Um dos vários aspectos que chamam a atenção nas dobraduras é que elas permitem realizar construções geométricas que não são possíveis com régua e compasso. Mostraremos nesse problema uma delas: como dividir qualquer ângulo agudo de medida θ em cinco (!) partes iguais. Esse é o *método de quintissecção de Lang*.

Primeiro, vamos exibir as dobras e depois, as instruções.



1 Considere um retângulo de papel com vértices A , B , C e D , e faça o ângulo θ a ser dividido em 5 no vértice A , ou seja, $m(\widehat{EAB}) = \theta$. Em geral, um retângulo 1×5 é suficiente para fazer a operação, mas se θ é muito pequeno é possível que um retângulo mais comprido seja necessário. O lado colorido do papel fica para trás e o lado branco do papel fica para frente. Para referência usaremos a direção desse segmento AB como horizontal.

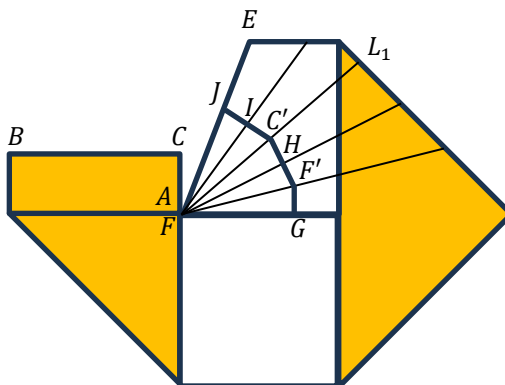
2 Dobre o papel como na figura: para isso, faça três dobras de 45° . O que importa é que AE não fique obstruído e BC seja menor do que metade de AD . Faça uma pequena marca perpendicular a AD ao longo de BC e depois faça uma dobra maior L , dobrando A sobre BC . Finalmente, dobre ao longo de AE para trás.

3 Essa é a parte mais desafiadora. Você vai fazer, ao mesmo tempo, a dobra L_1 que leva AE para baixo e a dobra L_2 que leva o ponto F a um ponto da reta L . O desafio é fazer com que o ponto C caia sobre a dobra L_1 e o ponto F caia no **mesmo** ponto que a reta L corta o segmento AE dobrado após fazer L_1 .

- 4 A dobradura fica assim depois do passo anterior. Note como o ponto C fica sobre L_1 e o ponto F fica sobre AE . Desfaça essa dobra. Na verdade, só queremos fazer a dobra L_1 para marcar a nossa solução.
- 5 Vamos provar em breve que L_1 delimita um ângulo de $\frac{3\theta}{5}$ com a horizontal do retângulo de papel. Partindo disso, dobre AE sobre L_1 (dobra 1 na figura). Em seguida, dobre 1 sobre a horizontal para obter a dobra 2 e, para terminar, dobre 2 sobre a horizontal para obter a dobra 3.

Agora, vamos à prova de que o método de Lang realmente divide θ em cinco partes iguais. Para resolver os itens lembre-se que dobras definem retas. Por exemplo, podemos usar a dobra L ou a reta L . Na figura a seguir:

- $C'F'$ é onde CF foi levado pela dobra L_2 .
- $F'G$ é perpendicular ao lado horizontal (com G sobre esse lado, onde estava AB no início do procedimento).
- J é o ponto de AE que é levado a F' pela dobra L_1 .
- H é o ponto médio de $C'F'$.
- I é o ponto médio de JC' .



- a) Observe que a dobra L_2 leva o ponto médio de CF , por onde passa a dobra L , ao ponto H . Lembrando que F' pertence a L , a reta L é levada para qual reta através da dobra L_2 ? Não se esqueça de justificar sua resposta.
- b) Mostre que FH é perpendicular a $C'F'$.
- c) Mostre que os triângulos FGF' e FHF' são congruentes.
- d) Prove que $m(\widehat{GF'F}) = \frac{\theta}{5}$ e $m(\widehat{GF'C'}) = \frac{3\theta}{5}$. Isso prova que L_1 delimita mesmo o ângulo de $\frac{3\theta}{5}$ com a horizontal.
- e) Mostre que os cinco triângulos FIJ , FIC' , FHC' , FHF' e FGF' são congruentes, e conclua que o método de Lang divide θ em cinco partes iguais.

PROBLEMA 7 – Valor: 5 pontos

Em jogos de RPG (*Role Playing Game*), como o famoso D&D (*Dungeons and Dragons*), é comum o lançamento de dados para definir o sucesso ou o fracasso de uma determinada ação do jogador. Existem dados com vários formatos, mas o mais comumente utilizado é o dado de 20 faces, conhecido como D20.

O resultado do lançamento de um dado pode ser considerado um valor aleatório X , em que S é o conjunto de todos os possíveis resultados, e cada elemento x de S tem uma probabilidade $P(x)$ de ocorrer. Por exemplo, no caso do D20, consideramos que a probabilidade de obter cada face do dado é $\frac{1}{20}$. Em símbolos: $P(1) = P(2) = \dots = P(20) = \frac{1}{20}$.

Definimos como *Esperança* ou *Valor Esperado* de um valor aleatório, a média ponderada dos possíveis resultados, utilizando como pesos suas respectivas probabilidades. Ou seja:

$$E[X] = \sum_{x \in S} x \cdot P(x)$$

- a) Calcule a Esperança do lançamento de um D20.

No D&D, dependendo do contexto, é comum o mestre conceder ao jogador uma vantagem em um lançamento. Em um *lançamento com vantagem*, o jogador joga dois dados, e mantém apenas o maior dos dois resultados. Por exemplo, se os dados forem 9 e 14, ele mantém apenas o 14, mas se forem ambos iguais a 6, o resultado é 6.

- b) Qual a probabilidade de em um lançamento do D20 com vantagem o resultado ser exatamente k ($1 \leq k \leq 20$)? Sua resposta deve ser dada em função de k .

c) Qual a Esperança de um lançamento do $D20$ com vantagem?

Você pode desejar utilizar que

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Personagens da raça Elfo podem adquirir o talento chamado Precisão Élfica (*Elven Accuracy*). Um personagem com esse talento, após lançar os dois dados em um lançamento com vantagem, relança o dado com menor resultado obtido (caso ambos os dados sejam iguais, ele relança apenas um deles), mantendo apenas o melhor dentre os dois dados após o relançamento do dado.

d) Qual a probabilidade de em um lançamento de $D20$ com vantagem, realizado por um personagem com Precisão Élfica, o resultado ser exatamente k ($1 \leq k \leq 20$)? Sua resposta deve ser dada em função de k .

e) Qual a Esperança de um lançamento de $D20$ com vantagem, realizado por um personagem com Precisão Élfica?

Você pode desejar utilizar que

$$\sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Suponha que um determinado personagem tem um talento único, a *Exatidão OPM*, em que em um lançamento com vantagem, ele possa escolher se relança um dado (mantendo o maior) ou se relança novamente os dois dados (ficando apenas com o maior desses dois novos lançamentos).

Nessa situação, quando é mais vantajoso relançar apenas um dado e quando é melhor relançar os dois novamente? Uma maneira de realizar essa escolha, é comparando as Esperanças das duas possibilidades.

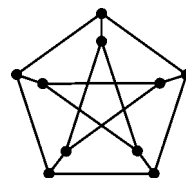
f) Suponha que em um lançamento com vantagem, um jogador mantém um dado de valor k ($1 \leq k \leq 20$) e relança o outro dado. Qual é a Esperança do resultado obtido? Sua resposta deve ser dada em função de k .

g) Em um lançamento com vantagem, para quais valores de k ($1 \leq k \leq 20$) é mais vantajoso relançar os dois dados novamente, em vez de manter um dos dados com valor k – maior resultado obtido – e relançar apenas o outro? Ou seja, quando a *Exatidão OPM* é, de fato, superior a Precisão Élfica?

XLVII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Fase Única (setembro de 2023)

Nível γ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)



www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:

- Nesta prova há 7 problemas. Você deve resolver 5 problemas.
- Caso você resolva mais de 5 problemas, sua nota é a soma das 5 maiores pontuações obtidas. Isso também vale para pontuações parciais.
- A duração da prova é de 4h30min.
- Escreva na primeira página da sua prova o horário em que você começou a prova e o horário em que você terminou a prova.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**.
- Somente serão aceitas resoluções feitas à mão, a tinta ou a lápis. Soluções digitadas em computador, por exemplo, não serão aceitas.
- Em dispositivos eletrônicos, os únicos usos permitidos são:
 - (1) leitor de arquivos somente para visualizar os enunciados;
 - (2) calculadora sem acesso à Internet.
- Não é permitido nenhum tipo de consulta, incluindo qualquer tipo de material físico (por exemplo, cadernos e livros) ou eletrônico/Internet.

PROBLEMA 1 – Valor: 2 pontos

Considere um tetraedro $OABC$ em que OA , OB e OC são perpendiculares dois a dois (ou seja, O é um “canto” do tetraedro).

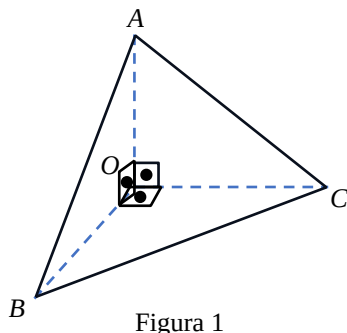


Figura 1

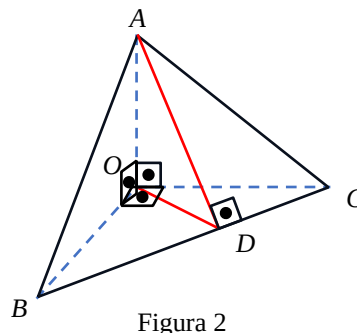


Figura 2

Na figura, sejam $x = OA$, $y = OB$, $z = OC$, $a = BC$, $b = AC$ e $c = AB$.

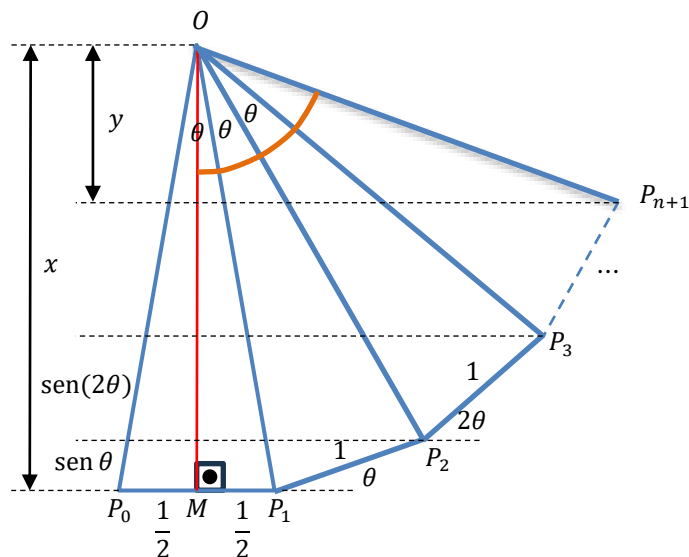
Nesse problema, iremos mostrar que o *teorema de De Gua*: o quadrado da área de ABC é a soma dos quadrados das áreas de OAB , OBC e OCA .

- a) Escreva, em termos de x , y e z , expressões para as áreas de OAB , OBC e OCA .
- b) Escreva expressões para os lados a , b e c em termos de x , y e z .
- c) Na figura 2, traçamos a altura AD . Pode-se provar que OD é perpendicular a BC (você pode usar esse fato sem demonstração). Prove que $OD = \frac{OB \cdot OC}{BC}$.
- d) O quadrado da área de ABC é $\frac{BC^2 \cdot AD^2}{4} = \frac{a^2 \cdot AD^2}{4} = \frac{a^2(OD^2 + OA^2)}{4}$. Tendo isso em vista, demonstre o teorema de De Gua.

PROBLEMA 2 – Valor: 3 pontos

Na figura a seguir, temos $n + 1$ triângulos isósceles com ângulo do vértice θ e base de comprimento 1. Por simplicidade, vamos considerar que θ é pequeno de modo que $(n + 1)\theta < 90^\circ$. Essa figura vai nos ajudar a encontrar uma fórmula para a soma

$$\sin \theta + \sin(2\theta) + \sin(3\theta) + \cdots + \sin(n\theta).$$



- Justifique por que $\sin \theta + \sin(2\theta) + \sin(3\theta) + \dots + \sin(n\theta) = x - y$.
- Observando o triângulo retângulo OP_1M , calcule $x = OM$ e $r = OP_1 = OP_2 = \dots = OP_{n+1}$ em função de θ .
- Calcule a medida do ângulo $\widehat{MP_{n+1}O}$ (não é $\frac{7\theta}{2}$!).
- Calcule y . Sua resposta deve ser na forma $\frac{f(\alpha)}{k \cdot g(\beta)}$, em que f e g são funções trigonométricas, k é uma constante real e α e β são ângulos. Em seguida, encontre uma fórmula para $\sin \theta + \sin(2\theta) + \sin(3\theta) + \dots + \sin(n\theta)$.
- Encontre uma fórmula para

$$\frac{1}{2} + \cos \theta + \cos(2\theta) + \dots + \cos(n\theta).$$

Sua resposta deve ser da forma $\frac{h(\alpha')}{t \cdot j(\beta')}$, em que h e j são funções trigonométricas, t é uma constante e α' e β' são ângulos.

PROBLEMA 3 – Valor: 3 pontos

Chamamos de *house edge* (margem de ganho da casa) a vantagem do casino no longo prazo enquanto oferece a oportunidade de um ganho significativo no curto prazo para o jogador. Em termos quantitativos, o *HE* (house edge) é o lucro do casino expresso em termos de uma porcentagem da aposta do jogador.

Por exemplo, uma roleta americana é composta por:

- Números de 1 a 18 em casas pretas.
- Números de 1 a 18 em casas vermelhas.
- Uma casa verde com o número 0.
- Uma casa verde com o número 00.



O jogador pode apostar em uma cor e se ganhar dobra o número de fichas que apostou.

Considerando que o jogador aposta uma ficha que a bolinha cairá em uma casa vermelha, então com probabilidade $\frac{18}{38} = \frac{9}{19}$ ele ganha uma ficha (além da que apostou) e com probabilidade $\frac{20}{38} = \frac{10}{19}$ ele perde uma ficha. E, correspondentemente, o casino perde uma ficha com probabilidade $\frac{9}{19}$ e ganha uma ficha com probabilidade $\frac{10}{19}$.

Logo $HE = \frac{9}{19} \cdot (-1) + \frac{10}{19} \cdot (1) = \frac{1}{19} \cdot (1) \cong 5,26\%$. Ou seja, o casino ganha uma ficha a cada 19 rodadas, em média. Se o jogador tiver 100 fichas e apostar uma ficha em 100 rodadas seguidas, ele deve perder por volta de 5 fichas ao final deste total de rodadas. E terminar com 95 fichas.

a) A roleta europeia não possui a casa 0, possuindo 37 casas ao todo em que a bolinha pode cair. Considerando a aposta na cor, qual é o HE de uma roleta europeia?

b) Qual é a probabilidade de o jogador vencer se $HE = 100\%$? Não se esqueça de que você deve justificar a sua resposta.

Para podermos resolver um problema interessante envolvendo as chamadas “slot machines” ou caça-níqueis, que atualmente são uma febre na Internet, vamos aprender alguns fatos sobre a expressão $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.

Como a expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ fica cada vez mais próxima do número de Euler, $e = 2,71828 \dots$, quando n cresce, pode-se demonstrar que $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{1}{-n}\right)^{-n}\right)^{-1}$ fica cada vez mais próxima de $e^{-1} = 0,36787 \dots$. Com efeito, a aproximação já é bastante boa para $n \geq 100$.

Uma regra prática motivada pela aproximação acima é que se a probabilidade de um evento ocorrer é $\frac{1}{n}$, então a chance de ele ocorrer pelo menos uma vez em n tentativas é aproximadamente $\frac{2}{3}$.

c) Justifique a regra prática acima.

d) O suponha que o HE de uma máquina caça-níqueis é 50% (isso mesmo, o HE destas máquinas é muito grande). Supondo que para uma ficha apostada, o jogador receba 1000 fichas. Qual é a probabilidade de ele ganhar em um giro da máquina?

e) Estime quantas vezes ele precisa jogar para ter uma probabilidade de 95% de vencer pelo menos uma vez.

PROBLEMA 4 – Valor: 3 pontos

Uma *terna pitagórica* é uma terna ordenada de inteiros positivos (a, b, c) que são medidas dos lados de um triângulo retângulo, ou seja, $a^2 + b^2 = c^2$.

Nós dizemos que uma terna pitagórica (a, b, c) é *bacana* se, e somente se, podemos acrescentar um dígito não nulo à esquerda das representações decimais de a , b e c e obter uma nova terna pitagórica. Por exemplo, $(5, 12, 13)$ é uma terna pitagórica bacana pois $(15, 112, 113)$, terna formada por números que obtemos acrescentando o dígito 1 à esquerda de 5, 12 e 13, também é uma terna pitagórica ($15^2 + 112^2 = 113^2$).

a) A terna pitagórica $(3, 4, 5)$ é bacana? Não se esqueça de que você deve justificar suas respostas.

Diremos ainda que uma terna pitagórica é *superbacana* se ela é bacana e não existem x , y e z tais que (x, y, z) é uma terna pitagórica bacana e $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = k$, em que k é inteiro. Ou seja, uma terna pitagórica é *superbacana* se ela é bacana e não é um “múltiplo” de uma terna pitagórica bacana. Por exemplo, $(50, 120, 130)$ é uma terna pitagórica bacana pois $(150, 1120, 1130)$, terna formada por números que obtemos acrescentando o dígito 1 à esquerda de 50, 120 e 130, também é uma terna pitagórica ($150^2 + 1120^2 = 1130^2$). Mas $(50, 120, 130)$ não é *superbacana*, pois é “múltiplo” da terna bacana $(5, 12, 13)$. De fato, $\frac{50}{5} = \frac{120}{12} = \frac{130}{13} = 10$.

b) A terna pitagórica $(5, 12, 13)$ é *superbacana*? Não se esqueça de que você deve justificar suas respostas.

Seja n um inteiro positivo maior ou igual a 2. Considere a terna ordenada (A, B, C) , em que $A = 5 \cdot 10^n$, $B = 125 \cdot 10^{2n-2} - 5$ e $C = 125 \cdot 10^{2n-2} + 5$.

c) Prove que (A, B, C) é uma terna pitagórica.

d) Prove que (A, B, C) é, de fato, uma terna pitagórica bacana.

e) Calcule $\text{mdc}(A, B, C)$.

f) Prove que existem infinitas ternas pitagóricas *superbacanas*.

PROBLEMA 5 – Valor: 4 pontos

Nesse problema, veremos um método diferente para resolver sistemas lineares. Ele é especialmente efetivo para resolver sistemas possíveis e indeterminados, encontrando rapidamente todas as (infinitas) soluções.

Para isso, vamos entender primeiro como encontrar o *kernel* de uma matriz $A_{m \times n}$, que é o conjunto verdade $\ker(A)$ do sistema linear $Ax = 0$, em que x é o vetor de tamanho n a ser encontrado (no caso, uma matriz $n \times 1$) e 0 é o vetor nulo de tamanho m (ou seja, uma matriz $m \times 1$ cujas entradas são todas iguais a zero).

Por exemplo, vamos encontrar o kernel da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Ou seja, queremos encontrar os vetores $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ tais que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para tanto, colocamos a matriz identidade de ordem n embaixo de A e reduzimos A à *forma escada de colunas*. Uma matriz está na forma escada de colunas quando todas as colunas nulas são as colunas mais à direita, e a primeira entrada não nula na coluna j , com $j > 1$, está abaixo da primeira entrada não nula da coluna $j - 1$. As operações permitidas para se chegar à forma escada de colunas são:

- Trocar as colunas i e j de lugar. Denotamos essa operação por $C_i \leftrightarrow C_j$.
- Multiplicar todos os números da coluna i por um número não nulo α . Denotamos essa operação por $C_i \leftarrow \alpha C_i$.
- Somar a cada elemento da coluna j o elemento na mesma linha da coluna i vezes α . Denotamos essa operação por $C_j \leftarrow C_j + \alpha C_i$.

Vamos resolver o nosso exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1 \\ C_4 \leftarrow C_4 + C_1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 - 2 \cdot 1 & 3 - 3 \cdot 1 & -1 + 1 \\ 1 & 4 - 2 \cdot 1 & 5 - 3 \cdot 1 & 2 + 1 \\ 1 & 0 - 2 \cdot 1 & 0 - 3 \cdot 1 & 0 + 1 \\ 0 & 1 - 2 \cdot 0 & 0 - 3 \cdot 0 & 0 + 0 \\ 0 & 0 - 2 \cdot 0 & 1 - 3 \cdot 0 & 0 + 0 \\ 0 & 0 - 2 \cdot 0 & 0 - 3 \cdot 0 & 1 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{C_3 \leftarrow C_3 - C_2 \\ C_4 \leftarrow C_4 - \frac{3}{2}C_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 - (-2) & 1 - \frac{3}{2} \cdot (-2) \\ 0 & 1 & 0 - 1 & 0 - \frac{3}{2} \cdot 1 \\ 0 & 0 & 1 - 0 & 0 - \frac{3}{2} \cdot 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \frac{3}{2} \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O kernel de A é formado pelas combinações lineares dos vetores abaixo das colunas nulas da forma escada de coluna de A . No nosso exemplo, então,

$$\ker(A) = \left\{ \alpha(-1; -1; 1; 0) + \beta\left(4; -\frac{3}{2}; 0; 1\right), \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

a) Agora é a sua vez! Use o método acima e encontre o kernel da matriz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -5 & 3 & 4 \\ 8 & 19 & -3 & -4 \end{bmatrix}.$$

b) Cada operação para se chegar à forma escada A^* de A pode ser interpretada como multiplicar por uma matriz à direita. Assim, pode-se mostrar que existe uma matriz C tal que $A^* = AC$, ou seja, no nosso processo fizemos

$$\begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} AC \\ IC \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AC \\ C \end{bmatrix}.$$

Observando que $A^*x = 0$ se, e somente se, as entradas de x correspondentes às colunas não nulas de A^* são nulas, explique por que $\ker(A)$ é a combinação linear das colunas de C abaixo das colunas nulas de A^* .

c) Para resolver sistemas lineares $Ax = B$, procedemos da seguinte forma: montamos a matriz

$$\begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

e tentamos reduzir $[A \mid B]$ à forma escada de coluna.

Usamos as mesmas operações, mas com as seguintes restrições:

- **Não é permitido** trocar B com nenhuma outra coluna.
- **Não é permitido** somar múltiplo de B a outra coluna.
- **Não é permitido** multiplicar B por um número.

Após a redução, obtemos $\left[\begin{array}{c|c} A^* & B^* \\ \hline C & P \end{array} \right]$, em que A^* está na forma escada e tentamos zerar a maior quantidade possível de elementos de B , obtendo B^* .

- Se B^* não é uma coluna de zeros, o sistema não tem soluções, ou seja, seu conjunto verdade é $V = \emptyset$.
- Se B^* é uma coluna de zeros, $-P$ é uma solução do sistema e o conjunto verdade é $-P + x$, em que $x \in \ker(A)$ está indicado nas colunas de C abaixo das colunas nulas de A^* (sistema possível e indeterminado). Se não há colunas nulas em A^* , a única solução é $-P$ (sistema possível e determinado).

Por exemplo, vamos resolver $Ax = B$, em que $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$, como no exemplo inicial, e $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, ou seja, o sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases}$$

Repetimos as operações que fizemos e adicionamos algumas para zerar B :

$$\left[\begin{array}{ccccc|l} 1 & 2 & 3 & -1 & 3 & C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 5 & C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_4 \leftarrow C_4 + C_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & C_5 \leftarrow C_5 - 3C_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1 \\ C_4 \leftarrow C_4 + C_1 \\ C_5 \leftarrow C_5 - 3C_1}} \left[\begin{array}{ccccc|l} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 2 & \\ 1 & -2 & -3 & 1 & -3 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{C_3 \leftarrow C_3 - C_2 \\ C_4 \leftarrow C_4 - \frac{3}{2}C_2 \\ C_5 \leftarrow C_5 - C_2}} \left[\begin{array}{ccccc|l} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & -2 & -1 & 4 & -1 & \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{3}{2} & -1 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \end{array} \right]$$

Com isso, uma solução particular é $-(-1; -1; 0; 0) = (1; 1; 0; 0)$ e o conjunto verdade é

$$V = \left\{ (1; 1; 0; 0) + \alpha(-1; -1; 1; 0) + \beta\left(4; -\frac{3}{2}; 0; 1\right), \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \left(1 - \alpha + 4\beta; 1 - \alpha - \frac{3\beta}{2}; \alpha; \beta\right), \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Agora é a sua vez! Use o método acima para resolver o sistema $Mx = N$, em que $N = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}$, ou seja,

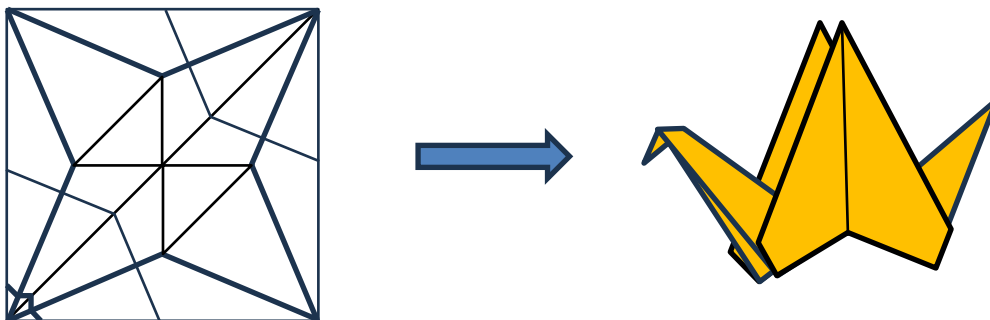
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ -2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -1 \\ 8x_1 + 19x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 7 \end{cases}$$

d) Mostre por que esse método funciona. Para isso, considere a matriz $\begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, que é a mesma matriz para resolver sistemas, com uma linha extra, consistindo em zeros em todas as colunas, exceto a última, que tem o número 1, e considere o kernel da matriz completa $[A \mid B]$.

PROBLEMA 6 – Valor: 4 pontos

As dobraduras, além de serem fonte de entretenimento e arte, nos fornecem também uma matemática bastante rica, tanto que existem matemáticos que pesquisam ativamente a matemática por trás das dobraduras.

Um objeto de estudo é verificar quando é possível transformar vincos marcados em um papel em uma dobradura plana. Uma dobradura é considerada plana quando todas as dobras são feitas de modo que os lados dobrados fiquem em contato. Veja o exemplo da figura a seguir.

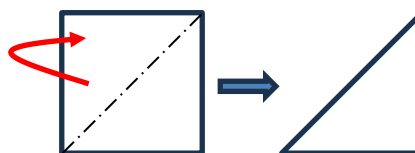


Nesse problema iremos estudar uma versão mais simples, em que estudamos quando é possível fazer uma dobradura plana a partir dos vincos em torno de um ponto. Vamos considerar uma região circular com centro no ponto.

Primeiro, classificamos as dobras como vale (a dobra fica para baixo) ou montanha (a dobra fica para cima). Na figura a seguir, cada papel tem um lado branco e um lado colorido. Indicamos dobras vale com linhas tracejadas (---) e dobras montanha com linhas traço-ponto (- · - · -).

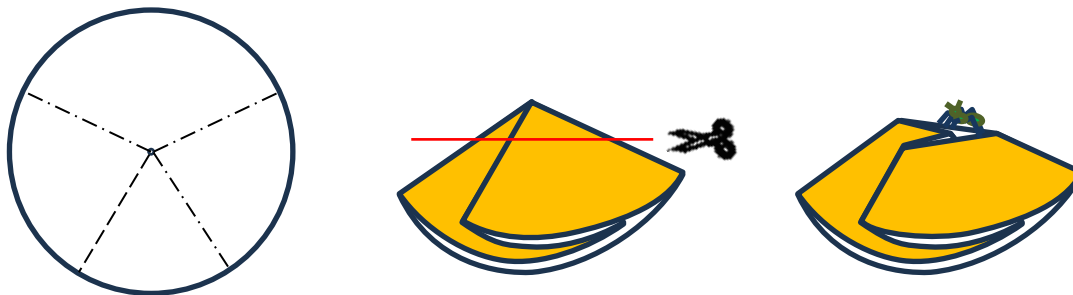


Dobra vale
(parte colorida aparece)



Dobra montanha
(parte branca aparece)

a) Prove o *teorema de Maekawa*: em uma dobradura plana a diferença entre as quantidades de dobras vale e de dobras montanha a partir de um ponto é ± 2 . Para isso, imagine que cortamos um buraco em torno do ponto (após as dobras) e imagine que uma formiga dá uma volta sobre as linhas de corte. Considere a soma dos ângulos que a formiga vira. Note que uma volta tem medida 360° e que cada dobra é uma virada de 180° ou -180° .



No exemplo acima, vemos a dobra “por cima”. O caso em que se vê a dobra “por baixo” dá um resultado análogo com o sinal trocado (você não precisa fazer esse caso).

O teorema de Maekawa nos dá uma condição necessária, mas não suficiente para existir a dobradura (em particular, mostra que a quantidade total de dobras é par, ou seja, é $2n$ para algum n inteiro positivo). Em particular, precisamos nos preocupar em fazer as dobras “fecharem” e verificar se o papel não “passa” as dobras. Por exemplo, se há três ângulos consecutivos entre dobras de 45° , 30° e 40° , não é possível que as duas dobras que formam 30° sejam ambas vale ou ambas montanha, já que os ângulos maiores não “cabem” no ângulo de 30° .

O *teorema de Kawasaki* nos dá uma condição necessária e suficiente para as dobras em torno de um ponto serem possíveis numa dobradura plana: sendo, no sentido anti-horário, $\ell_0, \ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{2n-1}$ as dobras e α_i o ângulo entre ℓ_i e ℓ_{i+1} , em que os índices são tomados módulo $2n$, é possível fazer essas dobras numa dobradura plana se, e somente se, $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \dots - \alpha_{2n-1} = 0$.

b) Prove que a condição é necessária, ou seja, que se as dobras são possíveis, então $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \dots - \alpha_{2n-1} = 0$. Para fazer isso, registre os ângulos com sinal (positivo num sentido e negativo no outro) após efetuar as dobras e note que cada dobra (vale ou montanha) inverte o sinal do próximo ângulo.

c) Antes de provar o outro lado do teorema de Kawasaki, precisamos de um lema. Sendo $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2n-1}$ números reais positivos tais que $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \dots - \alpha_{2n-1} = 0$ e denotando $S(i, j) = \alpha_i - \alpha_{i+1} + \alpha_{i+2} - \dots \pm \alpha_j$ (em que os índices são vistos módulo $2n$), vamos provar que existe k tal que $S(k, j) \geq 0$ para todo j com $0 \leq j < 2n$ (ou seja, nenhuma das $2n$ somas alternadas começando com α_k fica negativa).

Se $S(0, j) \geq 0$ para todo j , com $0 \leq j < 2n$, tomamos $k = 0$. Caso contrário, seja k o índice tal que $S(0, k-1) < 0$ é mínimo (ou seja, o mais negativo possível). Prove que k é par e que $S(k, j) \geq 0$ para todo j , com $0 \leq j < 2n$.

Você pode querer utilizar que $S(k, k-1) = 0$, que $S(k, j) = S(0, j) - S(0, k-1)$, para $k \leq j < 2n$, e que $S(k, j) = S(0, 2n-1) - S(j+1, k-1)$, para $0 \leq j \leq k-2$ com j ímpar.

d) Usando o lema e o k tal que $S(k, j) \geq 0$ para todo j , mostre que é possível fazer a dobradura plana fazendo em ℓ_{k+j} uma dobra montanha, se j é ímpar ou $j = 0$, e uma dobra vale, caso contrário. Isso conclui a demonstração do teorema de Kawasaki.

O teorema de Kawasaki pode ser generalizado: um cone de ângulo central $A \leq 360^\circ$ onde foram marcadas dobras ℓ_i e ângulos α_i entre elas (como definido anteriormente) admite dobradura plana se, e somente se, valem as equações $\alpha_0 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{2n-2} = \alpha_1 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{2n-1} = \frac{A}{2}$. Você não precisa provar isso, mas pode usar nos itens seguintes.

e) Agora nosso desafio é, dados os ângulos $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2n-1}$ entre os vincos de um cone que satisfazem a condição da Kawasaki, encontrar cotas para a quantidade de possíveis dobras (ou seja, designações de dobras vale e montanha para os vincos dados) para fazer uma dobradura plana. Denotando por $C(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2n-1})$ tal quantidade, prove que $C(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2n-1}) \leq 2^{\binom{2n}{n-1}}$.

f) Prove que $C(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2n-1}) \geq 2^n$. Para tanto, considere um cone de ângulo central A com ângulos $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2n-1}$ entre as dobras e o menor ângulo α_k . O fato de que se $\alpha_{k-1} \geq \alpha_k \leq \alpha_{k+1}$ pode ser usado para escolher as dobras em ℓ_k e ℓ_{k+1} de maneira adequada e usar indução finita.

g) Pode-se provar que se $\alpha_{i-1} > \alpha_i = \alpha_{i+1} = \dots = \alpha_{i+k} < \alpha_{i+k+1}$ então

$$C(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2n-1}) = \begin{cases} \left(\frac{k+2}{k+1}\right) C(\alpha_0, \dots, \alpha_{i-2}, \alpha_{i-1} - \alpha_i + \alpha_{i+k+1}, \alpha_{i+k+2}, \dots, \alpha_{2n-1}), & \text{se } k \text{ é par} \\ \left(\frac{k+2}{k+1}\right) C(\alpha_0, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+k+1}, \dots, \alpha_{2n-1}), & \text{se } k \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Usando esse fato (você não precisa prová-lo), calcule $C(20^\circ, 10^\circ, 40^\circ, 50^\circ, 60^\circ, 60^\circ, 60^\circ, 60^\circ)$.

PROBLEMA 7 – Valor: 5 pontos

Os números surreais foram inventados em 1969 pelo matemático John Horton Conway. A construção de Conway foi publicada em 1974 pelo matemático e cientista da computação Donald Knuth no seu livro *Surreal Numbers: How Two Ex-Students Turned on to Pure Mathematics and Found Total Happiness*. A princípio, esses números foram criados para estudar jogos matemáticos, mas depois descobriu-se que eles possuem propriedades de números reais como ordem e operações aritméticas e poderiam ser usados para construir os números racionais, reais e muitos outros. Neste problema vamos estudar esses números e algumas de suas propriedades.

Usaremos a seguinte notação para representar um número surreal: $x = \{X_L | X_R\}$ onde X_L e X_R são chamados de *conjunto da esquerda* de x e *conjunto da direita* de x , respectivamente, e são conjuntos de números surreais.

Como assim? Definimos surreais a partir de surreais? Calma! A construção dos números surreais é *recursiva*, ou seja, construímos novos números surreais a partir de números surreais preexistentes. Assim, quando escrevemos $x = \{X_L | X_R\}$, X_L e X_R são conjuntos de números surreais preexistentes, ou seja, que já foram definidos antes. O início da construção, que veremos em seguida, é com o conjunto vazio $\emptyset$. Para construir novos números, definimos, também recursivamente, a relação de *menor ou igual para surreais*, que é, em princípio, um pouco diferente do menor ou igual para números reais. Usamos o mesmo símbolo $\leq$, já que não usamos números reais na construção dos surreais.

Há dois axiomas de Conway que aparecem no livro do Knuth. Um deles, o axioma O, é a definição de **ordem**.

Axioma O – definição de $\leq$ e $\geq$: sendo $x = \{X_L | X_R\}$ e $y = \{Y_L | Y_R\}$ números surreais, dizemos que $x \leq y$ (ou equivalentemente, $y \geq x$, y é *maior ou igual* a x) quando nenhum elemento de X_L é maior ou igual a y e nenhum elemento de Y_R é menor ou igual a x . Quando x não é menor ou igual a y , denotamos $x \not\leq y$ e, da mesma forma, quando x não é maior ou igual a y , denotamos $x \not\geq y$. Desta forma, também podemos dizer que $x \leq y$ quando $x_L \not\geq y$ para todo $x_L \in X_L$ e $y_R \not\leq x$ para todo $y_R \in Y_R$. Também consideramos, por definição, que $x = y$ se, e somente se, $x \leq y$ e $y \leq x$.

O outro axioma, o axioma C, nos permite **construir** números surreais a partir de outros surreais.

Axioma C – construção de novos surreais: todo número surreal corresponde a dois conjuntos de números previamente criados tal que nenhum elemento do conjunto da esquerda é maior ou igual a um elemento do conjunto da direita. Isso significa que se $x = \{X_L | X_R\}$ é um número surreal, então para cada $x_L \in X_L$ e $x_R \in X_R$ vale $x_L \not\geq x_R$.

Para organizar os números surreais, imagine que os números sejam gerados diariamente. No dia 0 temos apenas o número $\bar{0} = \{\emptyset | \emptyset\}$, ou simplesmente $\{ | \}$, que satisfaz a condição dos dois axiomas, já que não possui elementos nos dois conjuntos. Note que temos dois conjuntos: o vazio $\emptyset$ e $\bar{0}$. A partir daí podemos construir os números de maneira recursiva usando os números criados até o dia anterior. No dia 1 temos os números novos $u = \{\bar{0} | \emptyset\}$ e $v = \{\emptyset | \bar{0}\}$ (para diminuir a notação, escrevemos os conjuntos da esquerda e da direita sem as chaves, ou seja, na verdade $U_L = V_R = \{\bar{0}\}$).

Veja que o número $\{\bar{0} | \bar{0}\}$ não satisfaz a condição do axioma C, pois o elemento do conjunto da esquerda é maior ou igual (na verdade, igual) ao mesmo elemento do conjunto da direita.

a) Usando **apenas** os axiomas O e C de Conway, prove que $\bar{0} \leq u$ e que $u \not\leq \bar{0}$.

Você pode querer utilizar que nos números surreais $a = a$ e a igualdade $a = b$ vale se, e somente se, $a \leq b$ e $b \leq a$.

Podemos provar, do mesmo jeito, que $v \leq \bar{0}$ e $v \not\leq \bar{0}$. Podemos denotar esses números como $\bar{1} = u = \{\bar{0} | \emptyset\}$ e $\overline{-1} = v = \{\emptyset | \bar{0}\}$. Desta forma, no dia 1 temos 3 números surreais: $\overline{-1} \leq \bar{0} \leq \bar{1}$ (a relação de $\leq$ nos surreais é transitiva).

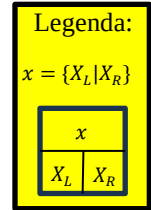
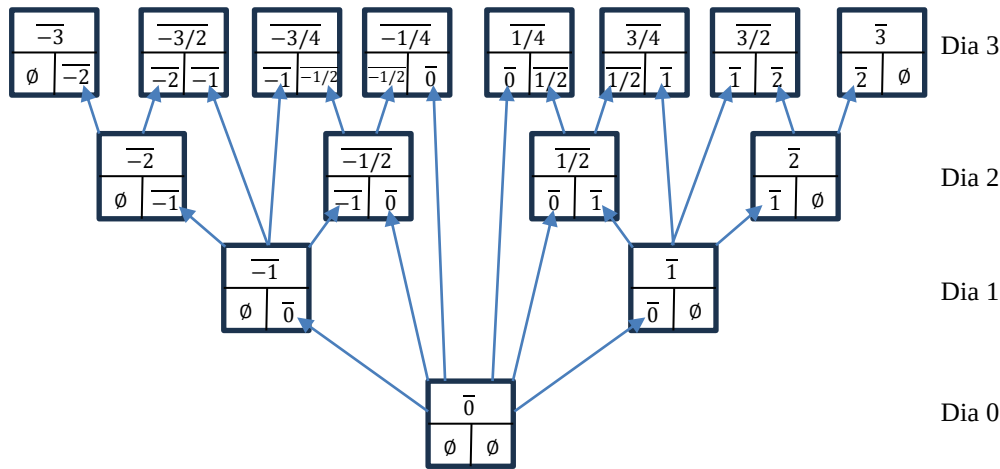
b) Prove que no dia 2 temos 20 números surreais (incluindo os que havia no dia 1).

Alguns desses números surreais são equivalentes entre si (verificamos se a e b são equivalentes checando se $a \leq b$ e $b \leq a$). É similar ao que acontece com frações equivalentes nos racionais $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \dots$.

Podemos provar usando indução que para quaisquer $x_L \in X_L$ e $x_R \in X_R$ vale que $x_L \leq x \leq x_R$. Isso nos dá a ideia de criar números novos nos intervalos entre números antigos. Isso gera a seguinte construção dos *números diádicos* $D = \left\{ \frac{n}{2^k} : n \in \mathbb{Z} \text{ e } k \in \mathbb{N} \right\}$, o conjunto das frações com denominador potência de 2, usando os números surreais: como antes, iniciamos com $\bar{0} = \{\emptyset | \emptyset\}$ e definimos recursivamente:

$$\bar{x} = \begin{cases} \{\emptyset|\emptyset\}, & \text{se } x = 0 \\ \{\overline{n-1}|\emptyset\}, & \text{se } x = n \text{ é inteiro positivo} \\ \{\emptyset|\overline{n+1}\}, & \text{se } x = n \text{ é inteiro negativo} \\ \left\{\frac{n-1}{2^k} \middle| \frac{n+1}{2^k}\right\}, & \text{se } x = \frac{n}{2^k} \text{ para } k > 0 \text{ e } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Com isso temos os seguintes números diádicos gerados até o dia 3:



Vamos agora falar de outra propriedade dos números surreais. A partir dos dois axiomas de Conway cada número surreal é gerado num dia. Vamos usar a função g para denotar o dia da geração de um número surreal. No nosso problema, a função g é dos surreais para os inteiros não negativos (tecnicamente não é o caso, mas não trataremos o caso mais geral aqui). Por exemplo, expressamos que o surreal $\bar{-1}$ foi gerado no dia 1 por $g(\bar{-1}) = 1$. Da mesma forma, $g(\bar{0}) = 0$ e $g(\bar{1}) = 1$. Para $x = \{X_L|X_R\}$ podemos chamar de $X_p = X_L \cup X_R$ o conjunto dos pais de x e podemos definir $g(x)$ como 1 a mais que o máximo de $g(x_p)$ onde x_p passa por todos os elementos de X_p , ou seja, $g(x)$ é igual a 1 mais a geração do “pai mais velho” de x . Em notação matemática, $g(x) = 1 + \sup_{x_p \in X_p} g(x_p)$.

c) Suponha que os números diádicos são construídos como mostrado anteriormente. Para um número diádico $x = \frac{n}{2^k}$ escrito como fração irredutível, prove que

$$g(x) = \lceil |x| \rceil + k$$

onde $\lceil r \rceil$ denota o menor inteiro que é maior ou igual a r , e g é a função de geração definida anteriormente. Na equação, interpretamos o x em $g(x)$ como um número surreal e o x em $\lceil |x| \rceil$ como um número racional.

Vamos agora definir a adição de números surreais. Primeiro definimos a adição (também recursivamente!) de um conjunto de números surreais $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ com um surreal y como $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} + y = \{x_1 + y, x_2 + y, \dots, x_n + y\}$. Note que dessa definição decorre que $\emptyset + y = \emptyset$. Daí para dois números surreais $x = \{X_L|X_R\}$ e $y = \{Y_L|Y_R\}$ temos $x + y = \{(X_L + y) \cup (x + Y_L) | (X_R + y) \cup (x + Y_R)\}$.

d) Lembre que $\bar{0} = \{\emptyset|\emptyset\}$. Prove que $x + \bar{0} = \bar{0} + x = x$ para qualquer x surreal.

e) Suponha que os números diádicos são construídos como mostrado anteriormente. Quanto é $\bar{2} + \bar{2}$ usando a soma de números surreais? Não se esqueça de justificar sua resposta.

Vamos provar agora o *Teorema do Nascimento da Adição*, que diz que $g(x + y) = g(x) + g(y)$ para quaisquer x e y surreais com g finito (sim, existem surreais com g infinito – são os casos que não estudaremos aqui). Faremos isto por indução em $g(y)$.

f) Prove a base da indução, ou seja, que se $g(y) = 0$, então $g(x + y) = g(x) + g(y)$ para todo x surreal.

g) Suponha que o resultado vale para todos t, u tais que $g(t) + g(u) < g(x) + g(y) = k$ para um k natural. Prove que $g(x + y) = g(x) + g(y)$.