



Солитон — структурно устойчивая уединённая волна, распространяющаяся в нелинейной среде. В данной задаче мы получим некоторые характерные свойства этих объектов.

Часть А. Математический маятник

Решение уравнения математического маятника (груза на невесомом стержне в однородном поле) не выражается в элементарных функциях в общем случае. Поэтому обычно рассматривают малые колебания вблизи положения равновесия. Однако имеется частный случай, а именно когда в нижней точке груз имеет скорость $v = \sqrt{4gL}$ при длине стержня L . В этом случае решение можно представить в виде:

$$\varphi(t) = a \arctan e^{bt},$$

где φ - угол между вертикальной осью и стержнем (в нижней точке $\varphi = \pi$, а моменту $t = 0$ соответствует прохождение нижней точки).

A1 1.00

Выразите константы a и b через g и l .

Часть В. Динамика солитона

Рассмотрим длинную жесткую горизонтальную струну, к которой через равные промежутки b припаяны одинаковые спицы расположенные вертикально. Масса спицы m , расстояние от центра масс спицы до струны d , момент инерции относительно оси проходящей через струну I . При отклонении одной спицы от соседней на угол $\Delta\varphi$ струна создает крутящий момент $K\Delta\varphi$. Если спицы на одной половине струны перевернуть на полный оборот, то на границе раздела образуется солитон (рис. 1). Можно считать, что характерный размер солитона $\lambda \gg b$. Так что считайте, что угловая координата в точке x задается непрерывной функцией $\varphi(x, t)$ (удаленные спицы на одной половине струны имеют координату $\varphi(-\infty, t) = 2\pi$, а на другой $\varphi(+\infty, t) = 0$).

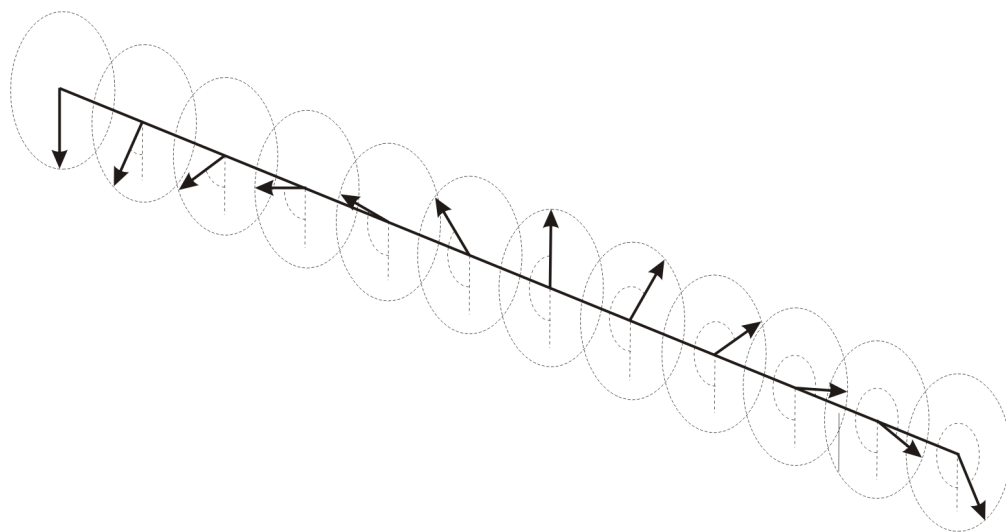


Рис. 1. Солитон.

B1 1.00

Напишите уравнение движения для $\varphi(x, t)$.

Солитон может распространяться с постоянной скоростью v . В этом случае $\varphi(x, t) = f(x \pm vt)$ в зависимости от направления распространения.

B2 0.50

Постройте качественный график зависимости $\varphi(x)$ для покоящегося солитона.

B3 2.00

Найдите максимальную скорость v_{cr} с которой может распространяться такой солитон.

В дальнейшем можете использовать v_{cr} в ваших ответах.

B4 2.00

Пусть при нулевой скорости характерный размер солитона равен λ_0 . Найдите размер λ солитона движущегося со скоростью v .

B5 2.00

Пусть энергия покоящегося солитона равна E_0 . Найдите энергию солитона, движущегося со скоростью v .

Примечание: За ноль потенциальной энергии в гравитационном поле примите уровень прямой, проходящей через центры масс спиц, расположенных достаточно далеко от солитона.

Часть С. Взаимодействие солитонов

Результаты, полученные в предыдущей части, показывают, что солитон очень похож на частицу. Более того, мы можем рассмотреть антисолитон, у которого спицы закручены в другую сторону. Мы будем говорить, что такой солитон имеет противоположный заряд.

C1 0.50

Укажите притягиваются или отталкиваются покоящиеся солитоны с противоположными зарядами.

C2 1.00

Рассмотрим неподвижные солитоны с противоположными зарядами, находящиеся на расстоянии $R \gg \lambda$ друг от друга. Оцените характер силы взаимодействия между солитонами.

Т

Механика

Колебания

2013

Сборы ХУ

У

Энергия



Website in English