

A1^{1.00}Выразите константы a и b через g и l .

В процессе движения ϕ изменяется от 0 до 2π . $\phi(-\infty) = 0$, а $\phi(+\infty) = a\pi/2 \Rightarrow a = 4$. Для нижней точки можем записать:

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{4be^{bt}}{1 + e^{2bt}} = \frac{\sqrt{4gL}}{L},$$

откуда при $t = 0$ получаем $b = \sqrt{g/L} = \omega_0$.

Ответ:

$$a = 4, \quad b = \sqrt{g/L}$$

B1^{1.00}Напишите уравнение движения для $\varphi(x, t)$.

$$I \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} = -mgd \sin \varphi_i + K(\varphi_{i+1} + \varphi_{i-1} - 2\varphi_i).$$

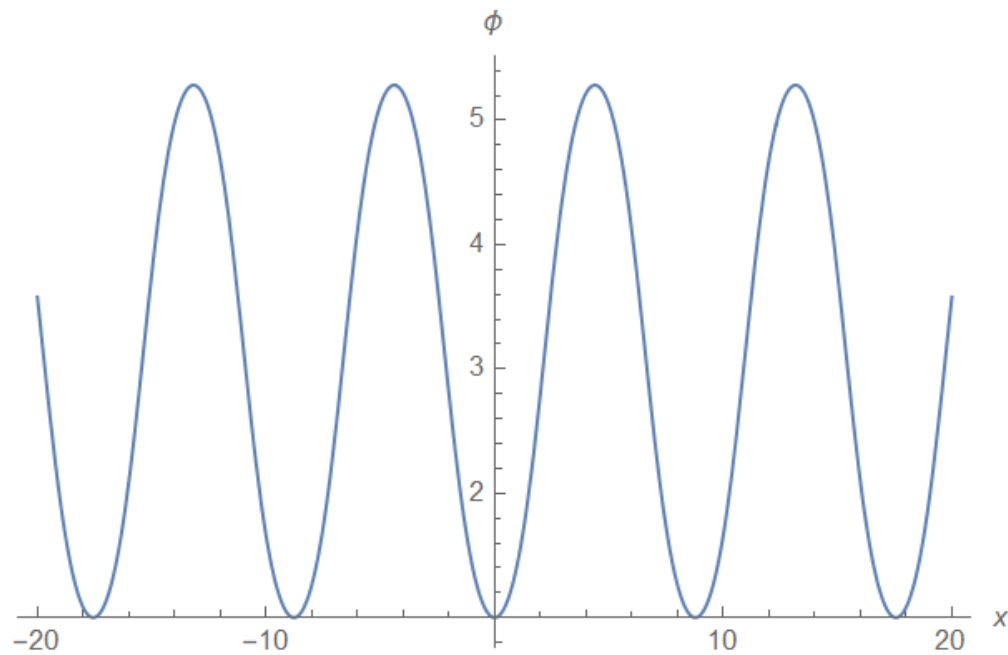
Так как $\lambda \gg b$, то можем написать $K(\varphi_{i+1} + \varphi_{i-1} - 2\varphi_i) \approx Kb^2(\partial^2 \varphi / \partial x^2)$. Таким образом, уравнение движения для $\varphi(x, t)$:

Ответ:

$$Kb^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = mgd \sin \varphi.$$

B2^{0.50}Постройте качественный график зависимости $\varphi(x)$ для покоящегося солитона.

Ответ:

B3^{2.00}Найдите максимальную скорость v_{cr} с которой может распространяться такой солитон.

Так как $\varphi(x, t) = \varphi(x \pm vt)$, то $(\partial^2 \varphi / \partial x^2) = (1/v^2)(\partial^2 \varphi / \partial t^2)$, а значит

$$\left(\frac{Kb^2}{v^2} - I \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = mgd \sin \varphi.$$

Для существования солитоноподобного решения, описанного в части А, необходимо, чтобы $(Kb^2/v^2 - I) > 0$.

Ответ:

$$v_{cr} = b\sqrt{K/I}$$

B4 2.00

Пусть при нулевой скорости характерный размер солитона равен λ_0 . Найдите размер λ солитона движущегося со скоростью v .

Если λ - характерный размер солитона, то $\tau = \lambda/v$ - характерное время, за которое он проходит отметку. Так как ϕ в заданной точке зависит лишь от ωt , то $\lambda \sim (v/\omega)$. Из уравнения (4) находим, что

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{(\frac{Kb^2}{v^2} - I)}} \sim \sqrt{\frac{1}{\frac{v_{cr}^2}{v^2} - 1}}.$$

Отсюда получаем, что $\lambda \sim \sqrt{v_{cr}^2 - v^2}$, а значит

Ответ:

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{v_{cr}^2}}.$$

B5 2.00

Пусть энергия покоящегося солитона равна E_0 . Найдите энергию солитона, движущегося со скоростью v .

Полная энергия солитона

$$E = \sum_i \frac{I\ddot{\varphi}_i^2}{2} + \sum_i \frac{K(\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2}{2} + \sum_i mgd(1 - \cos \varphi_i) \sim \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon dx,$$

где

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \frac{(Iv^2 + Kb^2)}{b} + \frac{mgd}{b} (1 - \cos \varphi).$$

плотность энергии. Если λ - характерный размер солитона, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 dx \sim \frac{1}{\lambda}$$

и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \cos \varphi) dx \sim \lambda.$$

Рассмотрим покоящийся солитон. Тогда $E_0 = \frac{A}{\lambda_0} + B\lambda_0$, где A и B - некоторые константы. Так как энергия для покоящегося солитона должна принимать минимальное значение, то

$$-\frac{A}{\lambda_0^2} + B = 0,$$

т.е. $\lambda_0 = \sqrt{B/A}$. Для солитона движущегося со скоростью v энергия запишется в виде

$$E = \frac{A}{\lambda} \frac{Iv^2 + Kb^2}{Kb^2} + B\lambda = \frac{A}{\lambda_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{v_{cr}^2}}} \left(\frac{v^2}{v_{cr}^2} + 1 \right) + B\lambda_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{v_{cr}^2}} = \frac{\frac{A}{\lambda_0} \left(\frac{v^2}{v_{cr}^2} + 1 \right) + B\lambda_0 \left(1 - \frac{v^2}{v_{cr}^2} \right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{v_{cr}^2}}}.$$

Используя то, что $A/\lambda_0 = B\lambda_0$ и $(A/\lambda_0) + B\lambda_0 = E_0$, получаем

Ответ:

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{v_{cr}^2}}}.$$

C1 0.50

Укажите притягиваются или отталкиваются покоящиеся солитоны с противоположными зарядами.

Из энергетических соображений а) отталкиваются б) притягиваются.

C2^{1.00}

Рассмотрим неподвижные солитоны с противоположными зарядами, находящиеся на расстоянии $R \gg \lambda$ друг от друга. Оцените характер силы взаимодействия между солитонами.

Заметим, что угол $\varphi(x, t = 0) = 4 \arctan e^{\pm \omega x/v}$ при больших (по модулю) значениях x равен $4e^{-\omega |x|/v}$. Значит, учитывая то, что

$$\frac{\omega}{v} = \frac{1}{v} \sqrt{\frac{mgd}{(\frac{Kb^2}{v^2} - I)}} = \sqrt{\frac{mgd}{(Kb^2 - Iv^2)}},$$

плотность энергии для покоящегося солитона в удаленных точках

$$\varepsilon = \frac{Kb}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \frac{mgd}{b}(1 - \cos \phi) \approx \frac{Kb}{2} \frac{\omega_0^2}{v^2} (\varphi)^2 + \frac{mgd}{2b} (\varphi)^2 = 16 \frac{mgd}{b} e^{-\sqrt{\frac{mgd}{Kb^2}} x} \sim e^{-2x/l},$$

где $l = \sqrt{\frac{mgd}{Kb^2}}$. Таким образом плотность энергии спадает экспоненциально быстро с расстоянием. Поэтому, когда мы имеем два солитона, влияние одного на плотность энергии другого существенно только начиная с середины дистанции между ними. Для нахождения силы воспользуемся методом виртуальных перемещений: $F \Delta x \approx \varepsilon_M \Delta x$, где $\varepsilon_M \approx \varepsilon(R/2)$ - характерная плотность энергии на "границе влияния". Таким образом заключаем, что сила взаимодействия экспоненциально спадает с расстоянием, и в ведущем члене $F \sim e^{-R/l}$.