



Часть А. Определение модулей упругости

При различного рода деформациях в твёрдом теле возникают напряжения. Пусть при деформировании некоторая точка тела, которая имела координату x , смещается на величину s . Если бы смещение было одним и тем же для всех точек тела, мы получили бы просто параллельный перенос твёрдого тела. Предположим поэтому, что в соседней точке с координатой $x + dx$ смещение несколько отличается от s и равно $s + ds$. Деформация в точке по определению равна:

$$\varepsilon = \frac{ds}{dx}.$$

Силы, которые производят деформации растяжения (сжатия), называются растягивающими (сжимающими) силами. Напряжения, соответствующие этим видам сил, определяются как сила, отнесённая к единице соответствующей площади:

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

Понятие напряжения имеет перед понятием силы то преимущество, что его можно установить локально в каждой точке. Оно определяется как локальный вектор силы, действующей на единицу площади некоторой воображаемой плоскости внутри тела.

Деформации и напряжения твёрдого тела связаны соотношением:

$$\sigma = E\varepsilon,$$

где величина E называется модулем Юнга.

Рассмотрим деформации и напряжения в бруске. Пусть однородное и изотропное тело имеет форму параллелепипеда. Перпендикулярно к его противоположным граням приложены силы F_x , F_y и F_z . Соответствующие им напряжения обозначим σ_x , σ_y и σ_z . Определим деформации, которые возникают под действием этих сил. Полагая деформации малыми, воспользуемся принципом суперпозиции малых деформаций.

Направим координатные оси параллельно рёбрам параллелепипеда. Пусть l_x , l_y и l_z – длины этих рёбер.

Если бы действовала только сила F_x , то ребро l_x получило бы приращение $\Delta_1 l_x$, определяемое соотношением

$$\frac{\Delta_1 l_x}{l_x} = \frac{\sigma_x}{E}.$$

Если бы действовала только сила F_y , то размеры бруска, перпендикулярные к оси y , сократились бы. В частности, ребро l_x при этом получило бы отрицательное приращение $\Delta_2 l_x$, которое можно вычислить по формуле

$$\frac{\Delta_2 l_x}{l_x} = -\frac{\mu \sigma_y}{E},$$

где μ называется коэффициентом Пуассона. Модуль Юнга и коэффициент Пуассона полностью характеризуют упругие свойства изотропного материала. Все прочие упругие постоянные могут быть выражены через E и μ . Относительное приращение ребра l_x под действием только одной силы F_z было бы равно

$$\frac{\Delta_3 l_x}{l_x} = -\frac{\mu \sigma_z}{E}.$$

Если все силы действуют одновременно, то согласно принципу суперпозиции малых деформаций результирующее удлинение ребра l_x будет равно

$$\Delta l_x = \Delta_1 l_x + \Delta_2 l_x + \Delta_3 l_x.$$

Аналогично вычисляются удлинения рёбер l_y и l_z . В результате находим

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) \\ \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_z) \\ \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \end{cases}$$

Эти уравнения называются обобщённым законом Гука.

В этой части задачи вам предлагается рассмотреть частные случаи деформаций упругих тел и найти коэффициенты упругости в таких случаях.

A1^{1.00}

Рассмотрите случай деформации всестороннего сжатия, когда все напряжения σ_x , σ_y , σ_z равны и отрицательны (на брусок действует постоянное давление со всех сторон $P = -\sigma_x = -\sigma_y = -\sigma_z$). Модулем всестороннего сжатия называется величина K , которая определяется из соотношения:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{P}{K},$$

где V – объём бруска. Определите модуль всестороннего сжатия K через E и μ .

A2^{1.00}

Рассмотрите случай деформации одноосного растяжения. В этом случае однородный стержень может растягиваться или сжиматься только в одном направлении, в направлении оси, которую примите за координатную ось x . Поперечные размеры стержня не меняются! (этому мешает окружающая среда). Модулем одноосного растяжения называется величина E' , которая определяется из соотношения:

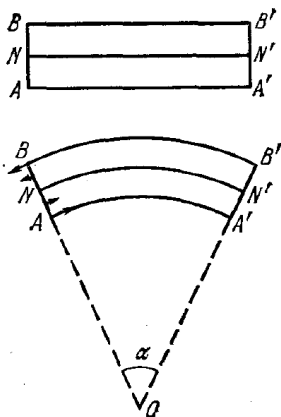
$$\frac{\Delta l_x}{l_x} = \frac{\sigma_x}{E'}.$$

Определите модуль одноосного растяжения E' через E и μ .

Часть В. Определение момента упругих сил при деформации изгиба

В этой части задачи требуется определить момент, который возникает в однородном брусе произвольного поперечного сечения при изгибе. Сечение бруса одинаковое на протяжении всей длины бруса. Пусть до деформации брусок имел прямолинейную форму. Проведя сечения AB и $A'B'$, нормальные к оси бруса, мысленно вырежем из него бесконечно малый элемент $AA'B'B$ (см.рис.) длину которого обозначим l_0 . В виду бесконечной малости выделенного элемента будем считать, что в результате изгиба прямые AA' , NN' , BB' и все прямые, им параллельные, перейдут в окружности с центрами, лежащими на оси O ,

перпендикулярной плоскости рисунка. Наружные волокна, лежащие выше линии NN' , при изгибе удлиняются, волокна, лежащие ниже линии NN' , – укорачиваются. Длина линии NN' остаётся неизменной. Эта линия называется нейтральной линией. Проходящее через неё сечение (недеформированного) бруса плоскостью, перпендикулярной к плоскости рисунка, называется нейтральным сечением. Пусть R радиус кривизны нейтральной линии NN' . Тогда $l_0 = R\alpha$, где α – центральный угол, опирающийся на дугу NN' .



B1 ^{0.50} Рассмотрите волокно бруса, находящееся на расстоянии ξ от нейтрального сечения (величина ξ положительна, если волокно находится выше нейтрального сечения и отрицательна, если ниже). Найдите удлинение этого волокна $\Delta l(\xi)$. Выразите ответ через l_0 , α , ξ .

B2 ^{0.50} Определите натяжение τ , действующее вдоль рассматриваемого волокна. Выразите ответ через модуль Юнга E , ξ , α , R , l_0 .

B3 ^{2.00} Пусть нейтральная линия и нейтральное сечение проходят через центр тяжести поперечного сечения бруса. Тогда сумма сил в одном сечении равно нулю. Выразите в интегральной (интеграл по площади сечения, dS – элемент площади для интегрирования) форме момент сил натяжения действующих на сечение AB . Выразите ответ через E , ξ , α , R , l_0 .

B3 ^{0.90}

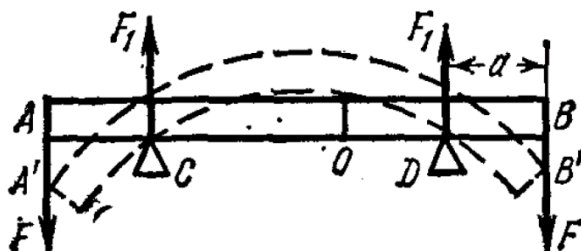
Обратите внимание на получившийся в предыдущем пункте интеграл. Введём обозначение $I = \int \xi^2 dS$. Величина I называется моментом инерции поперечного сечения бруса по аналогии с соответствующей величиной, вводимой при рассмотрении вращения тела вокруг неподвижной оси. Однако, в отличие от последней величины, имеющей размерность массы умноженной на квадрат длины, I есть чисто геометрическая величина с размерностью четвертой степени длины. Определите I для разных форм поперечных сечений бруса:

- Прямоугольное сечение с шириной w и высотой h .
- Круговое сечение радиуса r .
- Сечение цилиндрической трубы с внутренним диаметром r_1 и наружным r_2 .

Часть С. Определение параметров прогиба бруса

C1 ^{1.50}

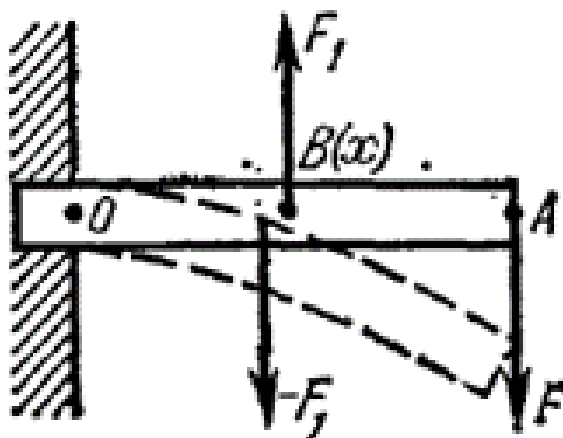
Рассмотрите однородный стержень с модулем Юнга E с круговым сечением радиуса r и длиной l_0 , который лежит на двух симметрично расположенных опорах C и D . К концам стержня A и B приложены одинаково направленные силы F . Найдите радиус кривизны $R(x)$ изогнутого бруса в каждой его точке по длине (координату x отсчитывайте по неизогнутому стержню от его центра). Выразите ответ через E , F , a , r , l_0 . Силой тяжести следует пренебречь по сравнению с F . Считайте также, что $R \gg l_0$.



C2 ^{2.00}

Рассмотрите балку с прямоугольным сечением с шириной w и высотой h и длиной l_0 , жёстко закреплённую в стене одним своим концом (перпендикулярно стене в месте крепления). На другой конец балки действует сосредоточенная сила F . Пусть x – координата по длине неизогнутой балки, отсчитываемая от стены, $y(x)$ – отклонение по высоте от неизогнутого положения балки. Определите функцию $y(x)$. Выразите ответ через E , F , l_0 , w , h . Силой тяжести следует пренебречь по сравнению с F . Считайте также, что для любого x выполнено: $y(x) \ll l_0$.

При решении Вам может понадобиться формула для радиуса кривизны линии заданной уравнением $y(x)$: $R = \frac{(1+y'(x)^2)^{3/2}}{y''(x)}$.



C3 ^{0.60} Определите стрелу прогиба балки из пункта C2. Стрелой прогиба называется смещение λ свободного конца балки под действием приложенной силы F . Выразите ответ через E , F , l_0 , w , h .

 Website in English