

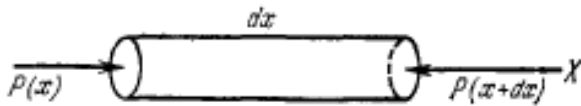


В этой задаче мы будем исследовать течение газа в сопле ракетного двигателя, а затем полет ракеты в воздушном пространстве и в пустоте.

Для начала вспомним несколько основополагающих соотношений, описывающих поведение текущих жидкостей или газов.

Часть А. Динамические соотношения для газа (1.0 балла)

Рассмотрим малый цилиндр вещества плотностью ρ (см. рис), движущийся под действием разности давлений. Движение стационарное и одномерное.



A1 ^{0.50} Запишите уравнение движения цилиндра. Определите градиент давления dp/dx . Ответ выразите через ρ , v и dv/dx .

A2 ^{0.50} Определите величину скорости звука c в газе. Ответ выразите через p , ρ и показатель адиабаты γ .

Часть В. Числа Маха и профиль сопла (2.0 балла)

Для описания течений газа удобно ввести параметр число Маха $M = v/c$, характеризующий отношение локальной скорости течения газа к скорости звука.

Теперь мы перейдем к качественному описанию сопла ракетного двигателя. В ракетном двигателе топливо сгорает в камере сгорания и попадает в сопло. Скорость продуктов сгорания увеличивается на всем протяжении сопла.

Решайте следующие пункты задачи в следующих предположениях:

- газ считается идеальным;
- газовый поток является изоэнтропным (то есть имеет постоянную энтропию, силы трения и диссипативные потери не учитываются) и адиабатическим (то есть теплота не подводится и не отводится);
- газовое течение является стационарным и одномерным, то есть в любой фиксированной точке сопла все параметры потока постоянны во времени и меняются только вдоль оси сопла, причём во всех точках выбранного поперечного сечения параметры потока одинаковы, а вектор скорости газа всюду параллелен оси симметрии сопла;
- массовый расход газа одинаков во всех поперечных сечениях потока;
- влияние всех внешних сил и полей (в том числе гравитационного) пренебрежимо мало;
- ось симметрии сопла является пространственной координатой x .

B1 ^{1.00} Обозначим площадь поперечного сечения сопла за A . Определите величину dA/dx . Ответ выразите через A , v , c и dv/dx .

B2 ^{0.50} Качественно постройте профиль сечения сопла $A(x)$, когда скорость газа на выходе $v < c$. Можно считать, что при входе в сопло скорость газа пренебрежимо мала. Укажите особые точки (если они есть).

B3 ^{0.50} Качественно постройте профиль сечения сопла $A(x)$, когда скорость газа на выходе $v > c$. Можно считать, что при входе в сопло скорость газа пренебрежимо мала. Укажите особые точки (если они есть).

Часть С. Анализ потока, выходящего из сопла (5.0 балла)

Рассмотрим более подробно процесс течения газа в сопле. Пусть на входе в сопло давление газа p_c , температура T_c и плотность ρ_c . Показатель адиабаты газа γ .

C1 ^{2.00} Изготавливая ракетный двигатель, задается желаемое давление на выходе из сопла p . Найдите скорость истечения газа v из сопла в зависимости от отношения p/p_c . Ответ выразите через p_c , ρ_c , γ и отношение p/p_c .

C2 ^{0.40} При каком значении p' скорость истечения из сопла достигает максимального значения? Чему равна эта максимальная скорость $v_{\max}$? Ответы выразите через p_c , ρ_c и γ .

C3 ^{1.10} Как зависит площадь выходного сечения сопла A от желаемого давления на выходе из сопла p (при фиксированных параметрах на входе в сопло)? Т.е. найдите функцию $A(p/p_c)$, считая, что массовый расход в каждом сечении сопла постоянен и равен λ . Ответ выразите через λ , p_c , ρ_c , γ и отношение p/p_c .

C4 ^{1.50} Найдите отношение давлений p_t/p_c в особых точках для пунктов B2 и B3. Ответ выразите через показатель адиабаты газа γ . Такие давления называют критическими.

C5 ^{0.70} Для формы сопла, определенной в пункте B3, определите зависимость величины v/c от величины p/p_c . Ответ выразите через γ и p/p_c . Постройте качественные графики зависимости скорости течения газа v/c вдоль сопла для случаев, когда давление на выходе больше критического ($p/p_c > p_t/p_c$) и когда давление на выходе меньше критического ($p/p_c < p_t/p_c$).

C6 ^{0.80} Для формы сопла, определенной в пункте B3, массовый расход газа на выходе из сопла можно представить в виде:

$$\lambda = C(A_{\text{вых}}, \gamma, p_c, \rho_c) \cdot f(p/p_c),$$

где C — постоянная величина, зависящая только от $A_{\text{вых}}$, γ , p_c и ρ_c , а $f(p/p_c)$ — функция, зависящая только от отношения p/p_c и γ .

Определите функцию $f(p/p_c)$. Ответ выразите через p/p_c и γ .

Постройте качественный график массового расхода λ от давления на выходе из сопла ($p/p_c \in [0; 1]$). Если на графике имеются особые точки, то укажите их на графике и получите соответствующие им аналитические выражения p/p_c .

Часть D. Импульс, приобретаемый ракетой (0.5 балла)

Пусть теперь ракета летит в атмосфере. Атмосферное давление p_0 , давление газа на выходе из сопла p , площадь сопла A , массовый расход газа λ , скорость истечения газов из сопла v .

D1 ^{0.50} Найдите удельный импульс, приобретаемый ракетой, при полете в атмосфере. Ответ выразите через p_0 , p , A и v .

Удельный импульс — это дополнительный импульс, приобретаемый ракетой, при выбросе единицы массы топлива.

 Website in English