

A1 1.00

Найти конечный заряд на обкладках конденсатора q .

Для ёмкости конденсатора имеем:

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d},$$

где S – площадь обкладок, а d – расстояние между ними.

Таким образом:

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{L}.$$

Поскольку пружина непроводящая, в состоянии равновесия электрическое поле в конденсаторе должно равняться нулю. Таким образом:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{S\varepsilon_0},$$

откуда:

Ответ:

$$q = C_0 L E.$$

A2 1.00

Найти изменение расстояния Δx между ними, считая процесс перетекания заряда квазистатическим.

Запишем условие равновесия пластины с зарядом q :

$$qE = \frac{q^2}{2S\varepsilon_0} + k\Delta x,$$

откуда после подстановки заряда q :

Ответ:

$$\Delta x = \frac{C_0 L E^2}{2k}.$$

A3 2.00

Какое количество теплоты Q выделится при этом процессе на резисторе?

Запишем закон изменения энергии в данной системе:

$$A_E = \Delta W_{эл} + \Delta W_{пр} + Q,$$

где A_E – работа электрического поля E по перемещению зарядов, ΔW_C – изменение энергии конденсатора, а $\Delta W_{пр}$ – изменение потенциальной энергии упругой деформации пружины.

Поскольку конденсатор электрически нейтрален – работа A_E электрического поля E составляет:

$$A_E = q\Delta\varphi_E = qE(L + \Delta x) = C_0 L E^2 \left(L + \frac{C_0 L E^2}{2k} \right),$$

где $\Delta\varphi_E$ – разность потенциалов электрического поля E на обкладках с зарядами $-q$ и q .

Поскольку изначально конденсатор не заряжен – его энергия в конечном состоянии равна изменению энергии ΔW_C :

$$\Delta W_C = W_C = \frac{qU}{2} = \frac{qE(L + \Delta x)}{2} = \frac{C_0 L E^2}{2} \left(L + \frac{C_0 L E^2}{2k} \right).$$

Поскольку изначально пружина не напряжена – её энергия упругой деформации в конечном состоянии равна изменению энергии упругой деформации $\Delta W_{пр}$:

$$\Delta W_{пр} = W_{пр} = \frac{k\Delta x^2}{2} = \frac{(C_0 L E^2)^2}{8k}.$$

Таким образом, для количества теплоты Q имеем:

Ответ:

$$Q = \frac{C_0 E^2 L^2}{2} + \frac{C_0^2 L^2 E^4}{8k}$$

B1 2.50

Считая, что изменение расстояния между пластинами $\Delta x \ll L$, найдите ёмкость C конденсатора после установления всех переходных процессов.

Для заряда конденсатора имеем:

$$q = CU.$$

Запишем условие равновесия обкладок конденсатора:

$$\frac{q^2}{2C_0L} = -k\Delta x.$$

С учётом выражения для ёмкости:

$$C = \frac{C_0L}{L + \Delta x} \Rightarrow \Delta x = L \left(\frac{C_0}{C} - 1 \right).$$

Таким образом:

$$\frac{C^2U^2}{2C_0L} = kL \left(1 - \frac{C_0}{C} \right).$$

Данное уравнение является точным. Далее воспользуемся условием $\Delta x \ll L$:

$$\frac{\Delta x}{L} = -\frac{\Delta C}{C} \ll 1 \Rightarrow \Delta C \ll C_0.$$

Таким образом:

$$\Delta C = \frac{C_0^2U^2}{2kL^2}.$$

Окончательно:

Ответ:

$$C = C_0 \left(1 + \frac{C_0U^2}{2kL^2} \right)$$

C1 0.50

Чему равно α ?

Ответ:

$$\alpha = \frac{C_0U^2}{2kL^2}.$$

D1 3.00

Найти соотношение амплитуд третьей и основной гармоник A_3/A_1 .

Считайте, что ω намного меньше частоты собственных механических колебаний, т.е. задержкой из-за механической инерции можно пренебречь.

Следующее соотношение может быть полезно: $4 \cos^3 x = 3 \cos x + \cos 3x$.

Для заряда конденсатора $q(t)$ имеем:

$$q(t) = C_0U_0 \left(\sin \omega t + \frac{C_0U_0^2 \sin^3 \omega t}{2kL^2} \right).$$

Дифференцируя:

$$I(t) = \omega C_0U_0 \left(\cos \omega t + \frac{3C_0U_0^2 \sin^2 \omega t \cos \omega t}{2kL^2} \right).$$

Приведём к косинусу:

$$I(t) = \omega C_0U_0 \left(\cos \omega t \left(1 + \frac{3C_0U_0^2}{2kL^2} \right) - \frac{3C_0U_0^2 \cos^3 \omega t}{2kL^2} \right).$$

Воспользуемся данным в условии соотношением и получим:

$$I(t) = \omega C_0U_0 \left(\cos \omega t \left(1 + \frac{3C_0U_0^2}{2kL^2} - \frac{9C_0U_0^2}{8kL^2} \right) - \frac{3C_0U_0^2 \cos 3\omega t}{8kL^2} \right).$$

Таким образом:

Ответ:

$$\frac{A_3}{A_1} = -\frac{3C_0U_0^2}{8kL^2 + 3C_0U_0^2}$$