

A1 ^{0.50} Запишите уравнение движения цилиндра. Определите градиент давления dp/dx . Ответ выразите через ρ , v и dv/dx .

Запишем закон изменения импульса в проекции на ось x для выделенного цилиндра:

$$dF_x = (p(x) - p(x + dx))S = -Sdp = a_x dm = \rho S a_x dx,$$

откуда:

$$\frac{dp}{dx} = -\rho a_x.$$

Поскольку движение газа является стационарным – скорость движения газа v_x является функцией только координаты x . Таким образом:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x}{dx} \frac{dx}{dt} = v_x \frac{dv_x}{dx}.$$

Тогда для градиента давления имеем:

Ответ:

$$\frac{dp}{dx} = -\rho v \frac{dv}{dx}.$$

A2 ^{0.50} Определите величину скорости звука c в газе. Ответ выразите через p , ρ и показатель адиабаты γ .

Выражение для скорости звука c в газе даётся выражением:

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S},$$

где частная производная p по ρ берётся при постоянной энтропии S .

В адиабатическом процессе:

$$pV^\gamma = \text{const} \Rightarrow p\rho^{-\gamma} = \text{const} \Rightarrow \frac{dp}{d\rho} = \frac{\gamma p}{\rho}.$$

Таким образом:

Ответ:

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}.$$

B1 ^{1.00} Обозначим площадь поперечного сечения сопла за A . Определите величину dA/dx . Ответ выразите через A , v , c и dv/dx .

Массовый расход газа должен быть одинаков в каждой точке трубы в силу стационарности течения. Отсюда:

$$\rho v A = \text{const} \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dA}{A} = 0.$$

Тогда для dA/dx имеем:

$$\frac{dA}{dx} = -A \left(\frac{1}{v} \frac{dv}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} \right)$$

Избавимся от величины $d\rho/dx$ с помощью продифференцированного в A2 уравнения адиабаты:

$$\frac{d\rho}{dx} = \frac{\rho}{\gamma p} \frac{dp}{dx} = \frac{1}{c^2} \frac{dp}{dx}.$$

Воспользовавшись результатом пункта A1, получим:

$$\frac{d\rho}{dx} = -\frac{\rho v}{c^2} \frac{dv}{dx}.$$

Тогда для dA/dx имеем:

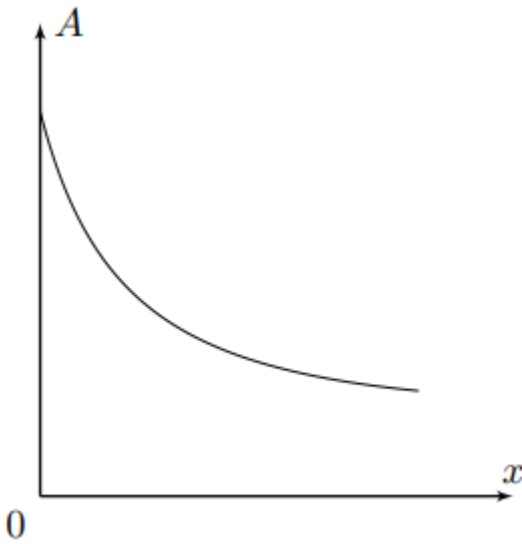
Ответ:

$$\frac{dA}{dx} = -\frac{A}{v} \frac{dv}{dx} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right).$$

B2 0.50

Качественно постройте профиль сечения сопла $A(x)$, когда скорость газа на выходе $v < c$. Можно считать, что при входе в сопло скорость газа пренебрежимо мала. Укажите особые точки (если они есть).

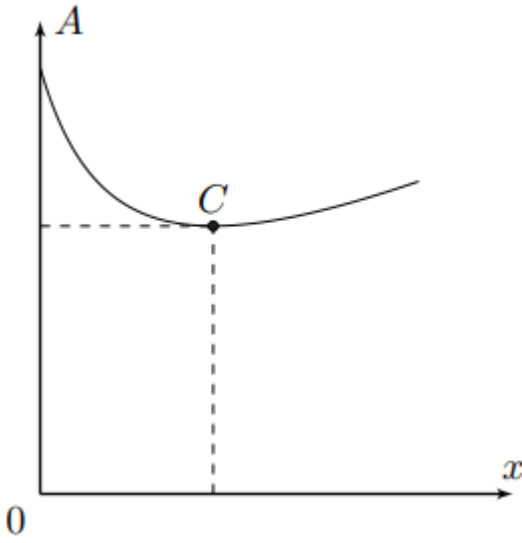
Ответ:



B3 0.50

Качественно постройте профиль сечения сопла $A(x)$, когда скорость газа на выходе $v > c$. Можно считать, что при входе в сопло скорость газа пренебрежимо мала. Укажите особые точки (если они есть).

Ответ:



Ответ: В точке C площадь сечения принимает минимальное значение.

C1 2.00

Изготавливая ракетный двигатель, задается желаемое давление на выходе из сопла p . Найдите скорость истечения газа v из сопла в зависимости от отношения p/p_c . Ответ выразите через p_c , ρ_c , γ и отношение p/p_c .

При расширении газ подчиняется уравнению Пуассона:

$$pV^\gamma = \text{const} \Rightarrow p^{1-\gamma} T^\gamma = \text{const} \Rightarrow T \sim p^{(\gamma-1)/\gamma}.$$

Далее для решения задачи нам понадобится уравнение Бернулли для линии тока:

$$\frac{v^2}{2} + \varphi + \frac{C_p T}{\mu} = \text{const}.$$

Приведём два способа его вывода.

Первый способ: переместим газ массой dm из положения 1 в положение 2. С учётом стационарности движения закон сохранения энергии записывается следующим образом:

$$\delta A_{\text{внеш}} = p_1 dV_1 - p_2 dV_2 = dU + dW_p + dE_k = \frac{C_V dm(T_2 - T_1)}{\mu} + dm(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{dm(v_2^2 - v_1^2)}{2}.$$

Поскольку $dV = dm/\rho$, получим:

$$\delta A_{\text{внеш}} = dm \left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right) \Rightarrow \frac{v^2}{2} + \varphi + \frac{C_V T}{\mu} + \frac{p}{\rho} = const.$$

Запишем уравнение Менделеева–Клапейрона:

$$pV = \nu RT \Rightarrow \frac{p}{\rho} = \frac{RT}{\mu}.$$

Поскольку $C_p = C_V + R$, имеем:

$$\frac{v^2}{2} + \varphi + \frac{C_p T}{\mu} = const.$$

Второй способ: Из уравнения Эйлера имеем:

$$\vec{a} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \varphi.$$

Рассмотрим скалярное произведение последнего выражения с вектором $d\vec{l}$, направленным вдоль данной линии тока:

$$\vec{a} \cdot d\vec{l} = \vec{v} \cdot d\vec{v} = vdv = -\frac{dp}{\rho} - d\varphi.$$

Из уравнения Менделеева–Клапейрона получим:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{RT}{\mu p} \Rightarrow vdv = -\frac{RT}{\mu} \frac{dp}{p} - d\varphi.$$

Продифференцируем уравнение Пуассона в координатах pT :

$$T^\gamma p^{1-\gamma} = const \Rightarrow \gamma T^{\gamma-1} dT p^{1-\gamma} + (1-\gamma) T^\gamma p^{-\gamma} dp = 0 \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{dT}{T}.$$

Таким образом:

$$vdv + \frac{\gamma R dT}{(\gamma-1)\mu} + d\varphi = 0 \Rightarrow \frac{v^2}{2} + \varphi + \frac{C_p T}{\mu} = const.$$

Из уравнения Бернулли имеем:

$$\frac{C_p T_c}{\mu} = \frac{v^2}{2} + \frac{C_p T}{\mu} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2C_p T'}{\mu} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)}.$$

Отношение T/T_c определим из уравнения Пуассона:

$$\frac{T}{T_c} = \left(\frac{p}{p_c}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}.$$

Окончательно с учётом уравнения Менделеева–Клапейрона находим:

Ответ:

$$v = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_c}{\rho_c} \left(1 - \left(\frac{p}{p_c}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right)}.$$

С2^{0.40}

При каком значении p' скорость истечения из сопла достигает максимального значения? Чему равна эта максимальная скорость $v_{\max}$? Ответы выразите через p_c , ρ_c и γ .

Максимум скорости достигается при минимальном давлении p , поэтому:

Ответ:

$$p' = 0.$$

Ответ:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_c}{\rho_c}}.$$

С3 1.10

Как зависит площадь выходного сечения сопла A от желаемого давления на выходе из сопла p (при фиксированных параметрах на входе в сопло)? Т.е. найдите функцию $A(p/p_c)$, считая, что массовый расход в каждом сечении сопла постоянен и равен λ . Ответ выразите через λ , p_c , ρ_c , γ и отношение p/p_c .

На выходе имеем:

$$\lambda = Av\rho.$$

Выражение для скорости было получено в пункте С1, а плотность ρ определим из уравнения Пуассона:

$$p\rho^{-\gamma} = p_c\rho_c^{-\gamma} \Rightarrow \rho = \rho_c \left(\frac{p}{p_c} \right)^{1/\gamma}.$$

Окончательно:

Ответ:

$$A = \frac{\lambda}{\rho_c \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_c}{\rho_c} \left(\frac{p}{p_c} \right)^{1/\gamma} \left(1 - \left(\frac{p}{p_c} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right)^{1/2}}}.$$

С4 1.50

Найдите отношение давлений p_t/p_c в особых точках для пунктов В2 и В3. Ответ выразите через показатель адиабаты газа γ . Такие давления называют критическими.

Воспользуемся уравнением Бернулли:

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_c}{\rho_c} = \frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_t}{\rho_t}.$$

В особой точке $v = c = \sqrt{\gamma p_t / \rho_t}$, поэтому:

$$\frac{p_c}{\rho_c} = \frac{\gamma-1}{2} \frac{p_t}{\rho_t} + \frac{p_t}{\rho_t} = \frac{\gamma+1}{2} \frac{p_t}{\rho_t}.$$

Из уравнения Пуассона имеем:

$$\frac{\rho_t}{\rho_c} = \left(\frac{p_t}{p_c} \right)^{1/\gamma},$$

откуда:

Ответ:

$$\frac{p_t}{p_c} = \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}.$$

С5 0.70

Для формы сопла, определенной в пункте В3, определите зависимость величины v/c от величины p/p_c . Ответ выразите через γ и p/p_c . Постройте качественные графики зависимости скорости течения газа v/c вдоль сопла для случаев, когда давление на выходе больше критического ($p/p_c > p_t/p_c$) и когда давление на выходе меньше критического ($p/p_c < p_t/p_c$).

Получим искомую зависимость:

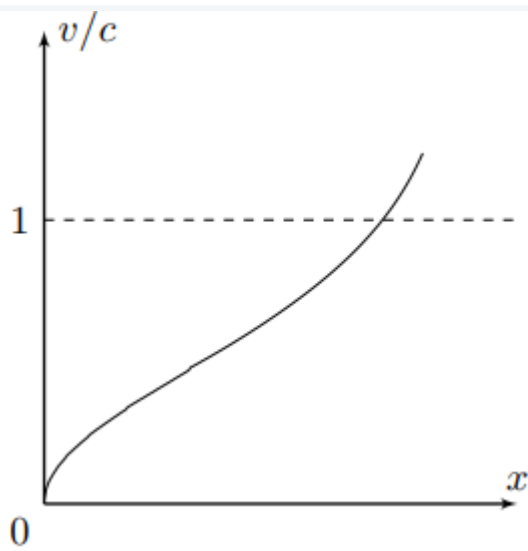
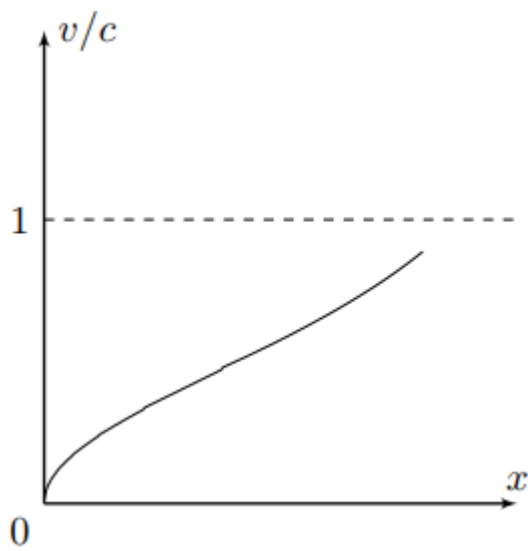
$$\frac{v}{c} = \frac{\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_c}{\rho_c} \left(1 - \left(\frac{p}{p_c} \right) \right)}}{\sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}} = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} \frac{p_c}{p} \frac{\rho}{\rho_c} \left(1 - \left(\frac{p}{p_c} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right)}.$$

С учётом уравнения Пуассона:

$$\frac{v}{c} = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1} \left(\left(\frac{p}{p_c} \right)^{(1-\gamma)/\gamma} - 1 \right)}.$$

Поскольку $dv/dx > 0 - dp/dx < 0$ по всей длине трубы, а значит величина v/c монотонно возрастает во всей длине трубы. Таким образом, при $p/p_c > p_t/p_c$ максимальное значение $v/c < 1$, а при $p/p_c < p_t/p_c$ максимальное значение $v/c > 1$.

Ответ:



C6^{0.80} Для формы сопла, определенной в пункте В3, массовый расход газа на выходе из сопла можно представить в виде:

$$\lambda = C(A_{\text{вых}}, \gamma, p_c, \rho_c) \cdot f(p/p_c),$$

где C — постоянная величина, зависящая только от $A_{\text{вых}}$, γ , p_c и ρ_c , а $f(p/p_c)$ — функция, зависящая только от отношения p/p_c и γ . Определите функцию $f(p/p_c)$. Ответ выразите через p/p_c и γ .

Постройте качественный график массового расхода λ от давления на выходе из сопла ($p/p_c \in [0; 1]$). Если на графике имеются особые точки, то укажите их на графике и получите соответствующие им аналитические выражения p/p_c .

Качественная зависимость $\lambda(p/p_c)$ имеет следующий вид:

$$\lambda = C \cdot \sqrt{\left(\frac{p}{p_c} \right)^{2/\gamma} - \left(\frac{p}{p_c} \right)^{(\gamma+1)/\gamma}},$$

т.е:

Ответ:

$$f(p/p_c) = \sqrt{\left(\frac{p}{p_c} \right)^{2/\gamma} - \left(\frac{p}{p_c} \right)^{(\gamma+1)/\gamma}}$$

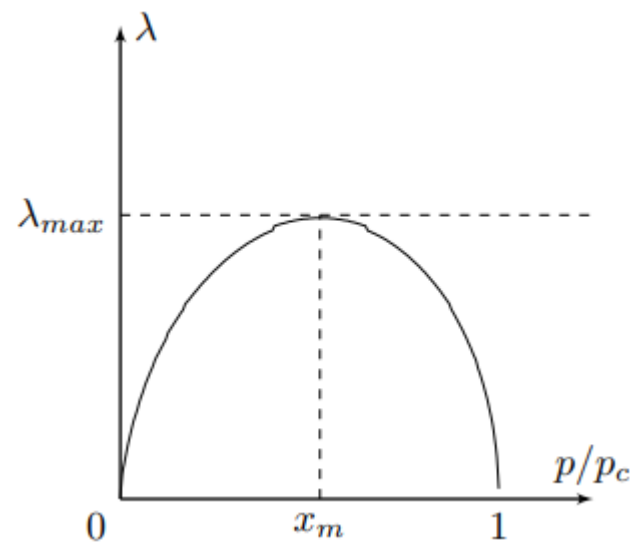
Сразу обратим внимание, что при $p/p_c = x = 0;1$ массовый расход обращается в ноль.

Также массовый расход имеет максимум при следующем значении x_m :

$$\frac{2}{\gamma} x^{(2-\gamma)/\gamma} - \frac{\gamma+1}{\gamma} x^{1/\gamma} = 0 \Rightarrow x_m = \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}.$$

Качественный график приведён на рисунке ниже:

Ответ:



D1 ^{0.50} Найдите удельный импульс, приобретаемый ракетой, при полете в атмосфере. Ответ выразите через p_0 , p , A и v .
 Удельный импульс – это дополнительный импульс, приобретаемый ракетой, при выбросе единицы массы топлива.

При выбросе вещества импульс, получаемый ракетой в единицу времени, составляет:

$$\frac{dP}{dt} = F,$$

где F – полная сила, действующая на ракету.
 Тогда для удельного импульса, обусловленного реактивной тягой, имеем:

$$\frac{dP}{dm} = \frac{F}{\lambda}$$

Сила, действующая на ракету, складывается из силы реактивной тяги $F_p = \lambda v$, а также разности сил атмосферного давления и давления, действующего на вылетающий газ $F_d = -(p_0 - p)A$.
 Таким образом:

$$F = \lambda v - (p_0 - p)A,$$

или же:

Ответ:

$$\frac{dp}{dm} = \frac{F}{\lambda} = v - \frac{(p_0 - p)}{\lambda}.$$