

A1 1.50

Какова минимально возможная длина L_{min} тележки?

Прямо перед ударом скорость центра шара направлена вертикально вниз и равна:

$$v_0 = \sqrt{2gh}.$$

Введём систему координат xy , где ось x направлена вправо, а ось y – вертикально вверх.

Поскольку удар упругий – перпендикулярные плоскости тележки компоненты скорости центра шара прямо перед соударением и сразу после него равны по модулю. Тогда изменение импульса шара в проекции на ось y составляет:

$$\Delta p_y = 2mv_0 = 2m\sqrt{2gh} = \int_0^\tau N dt.$$

Поскольку шар всегда проскальзывал по тележке – проекция на ось x силы трения, действующей на шар, всегда равна μN . Таким образом, изменение импульса шара в проекции на ось x составляет:

$$\Delta p_x = mv_x = \int_0^\tau \mu N dt = \mu \int_0^\tau N dt = \mu \Delta p_y = 2\mu m\sqrt{2gh} \Rightarrow v_x = 2\mu\sqrt{2gh}.$$

Поскольку трением качения можно пренебречь – для системы, состоящей из тележки и шара выполняется закон сохранения импульса в проекции на ось x :

$$mv_x + Mu_x = 0 \Rightarrow u_x = -\frac{mv_x}{M}.$$

Перейдём в систему отсчёта, связанную с тележкой, после соударения. В данной системе отсчёта сразу после соударения центр шара движется со скоростью, компоненты которой составляют:

$$v_{\text{отн}(y)} = v_y = \sqrt{2gh} \quad v_{\text{отн}(x)} = v_x - u_x = v_x \left(1 + \frac{m}{M}\right) = 2\mu\sqrt{2gh} \left(1 + \frac{m}{M}\right).$$

Длина L тележки должна удовлетворять условию:

$$\frac{L}{2} \geq v_{\text{отн}(x)} t_{\text{пол}},$$

где $t_{\text{пол}}$ – время полёта шара между соударениями, для которого имеем:

$$t_{\text{пол}} = \frac{2v_0}{g}.$$

Таким образом:

$$L_{min} = \frac{4v_{\text{отн}(x)}v_0}{g}.$$

Подставляя $v_{\text{отн}(x)}$, находим:

Ответ:

$$L_{min} = 16\mu h \left(1 + \frac{m}{M}\right) = 2.8 \text{ м.}$$

A2 1.50

Какова минимально возможная начальная угловая скорость ω_{min} шара?

Пусть ω' – угловая скорость шара сразу после соударения. Поскольку шар проскальзывал по тележке в течение всего времени соударения – величина ω' должна быть такой, что проекция на ось x скорости тележки всегда должна быть не меньше соответствующей проекции скорости точки шара, в которой он касается тележки:

$$v_x - \omega' R < u_x \Rightarrow \omega' \geq \frac{v_x}{R} \left(1 + \frac{m}{M}\right).$$

Запишем уравнение динамики вращательного движения относительно центра масс шара:

$$I\dot{\omega} = -F_{\text{тр}(x)}R \Rightarrow I(\omega - \omega') = \frac{2mR^2(\omega - \omega')}{5} = \int_0^\tau \mu NR dt = R\Delta p_x = mv_x R,$$

откуда:

$$\omega' = \omega - \frac{5v_x}{2R} \Rightarrow \omega \geq \frac{v_x}{R} \left(\frac{7}{2} + \frac{m}{M}\right).$$

Минимальная угловая скорость достигается при знаке равенства и составляет:

Ответ:

$$\omega_{min} = \frac{2\mu\sqrt{2gh}}{R} \left(\frac{7}{2} + \frac{m}{M} \right) = 19.5 \text{ рад/с.}$$

A3 1.50

Определите потери механической энергии при первом и втором соударениях ΔE_1 и ΔE_2 соответственно.

Из закона сохранения механической энергии получим:

$$\frac{mv_{y(0)}^2}{2} + \frac{I\omega_{min}^2}{2} = \frac{mv_x^2}{2} + \frac{mv_y^2}{2} + \frac{I\omega_y^2}{2} + \frac{Mu_x^2}{2} + \Delta E_1.$$

При ударе квадрат вертикальной компоненты сохраняется, поэтому:

$$\Delta E_1 = \frac{I\omega_{min}^2}{2} - \frac{I\omega^2}{2} - \frac{mv_x^2}{2} - \frac{Mu_x^2}{2}.$$

Подставляя полученные ранее величины, находим:

Ответ:

$$\Delta E_1 = 4\mu^2 mgh \left(\frac{2}{5} \left(\frac{7}{2} + \frac{m}{M} \right)^2 - \frac{2}{5} \left(1 + \frac{m}{M} \right)^2 - 1 - \frac{m}{M} \right) = 4\mu^2 mgh \left(\frac{7}{2} + \frac{m}{M} \right) = 156 \text{ Дж.}$$

Поскольку при втором ударе проскальзывания нет – потери энергии равны нулю, поскольку удар является упругим.

Ответ:

$$\Delta E_2 = 0.$$

A4 1.50

Найдите работы сил трения, действующих со стороны шара на тележку $A_{шт}$ и со стороны тележки на шар $A_{тш}$.

Из теоремы об изменении кинетической энергии:

$$A_{шт} = K_{т} = \frac{Mu_x^2}{2}.$$

Таким образом:

Ответ:

$$A_{шт} = \frac{4\mu^2 m^2 gh}{M} = 16 \text{ Дж.}$$

Из теоремы об изменении кинетической энергии для шара:

$$A_{тш} = K_{ш} - K_{ш(0)} = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{m^2 v_x^2}{2} - \frac{I\omega_{min}^2}{2}.$$

Также последнее соотношение можно получить из суммарной работы внутренних сил:

$$A_{шт} + A_{тш} = -\Delta E_1 = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{mv_x^2}{2} + \frac{Mu_x^2}{2} - \frac{I\omega_{min}^2}{2}.$$

Таким образом:

Ответ:

$$A_{тш} = -4\mu^2 mgh \left(\frac{7}{2} + \frac{2m}{M} \right) = -172 \text{ Дж.}$$

A5 1.00

Какую энергию поступательного движения $K_{ш}$ и $K_{т}$ за время соударения приобрело каждое из тел?

Поскольку тележка не вращается – её кинетическая энергия равна энергии поступательного движения, поэтому:

Ответ:

$$K_{\text{т}} = \frac{4\mu^2 m^2 gh}{M} = 16 \text{ Дж.}$$

За время соударения кинетическая энергия поступательного движения шара изменяется на величину:

$$K_{\text{ш}} = \frac{mv_x^2}{2},$$

откуда:

Ответ:

$$K_{\text{ш}} = 4\mu^2 mgh = 40 \text{ Дж.}$$