

Полная сила, с которой воздух действует на парус, направлена перпендикулярно его плоскости. Для неё имеем:

$$F = \frac{dm}{dt} u_n = \rho S_n u \cdot u_n$$

где dm/dt – масса воздуха, налетающая на парус в единицу времени, ρ – плотность воздуха, S_n – площадь поперечного сечения потока воздуха, попадающего на парус, а u_n – компонента скорости воздуха, перпендикулярная поверхности паруса.

Пусть S – площадь паруса, а u – скорость ветра. Тогда:

$$S_n = S \cos \beta \quad u_n = u \cos \beta$$

откуда:

$$F = \rho S u^2 \cos^2 \beta$$

Запишем условие равновесия для парусника:

$$F_\tau = kv$$

где v – скорость движения парусника, а k – коэффициент пропорциональности между силой сопротивления воды и скоростью парусника.

Для F_τ имеем:

$$F_\tau = F \cos(\pi/2 - \beta + \alpha) = F \sin(\beta - \alpha)$$

Таким образом:

$$\rho S u^2 \cos^2 \beta \sin(\beta - \alpha) = kv$$

Для дрейфовой компоненты скорости парусника имеем:

$$v_d = v \sin \alpha = \frac{\rho S u^2}{k} \cos^2 \beta \sin(\beta - \alpha) \sin \alpha$$

Чтобы двигаться против ветра зигзагами, необходимо периодически изменять углы α и β на противоположные, что сохранит значение полученной функции.

Тогда для решения задачи необходимо исследовать на экстремум функцию $f(\alpha, \beta)$, равную:

$$f(\alpha, \beta) = \cos^2 \beta \sin(\beta - \alpha) \sin \alpha$$

Воспользуемся тригонометрическим тождеством:

$$\sin x \sin y = \frac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{2}$$

Тогда для $f(\alpha, \beta)$ имеем:

$$f(\alpha, \beta) = \frac{\cos^2 \beta (\cos(\beta - 2\alpha) - \cos \beta)}{2}$$

При любом фиксированном значении β максимальное значение функции достигается при $\alpha = \beta/2$, поскольку $\cos(\beta - 2\alpha) \leq 1$. Тогда задача сводится к исследованию функции одной переменной $x = \beta$:

$$f(x) = \frac{x^2 - x^3}{2}$$

Продифференцируем $f(x)$:

$$\frac{df}{dx} = x - \frac{3x^2}{2} = 0 \Rightarrow x = 0, \frac{2}{3}$$

Значение $x = 0$ соответствует покою парусника, а $x = 2/3$ – движению с максимальной дрейфовой скоростью. Таким образом:

Ответ:

$$\alpha = \frac{\arccos(2/3)}{2} \approx 24.1^\circ \quad \beta = \arccos(2/3) \approx 48.2^\circ$$

Также углы парусника, соответствующие максимальной скорости дрейфа, могут быть найдены из условий:

$$\frac{\partial f(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = 0 \quad \frac{\partial f(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = 0$$

Рассмотрим дифференцирование по α :

$$\frac{\partial f(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = \cos^2 \beta (\cos \alpha \sin(\beta - \alpha) - \sin \alpha \cos(\beta - \alpha)) = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\beta - \alpha) \Rightarrow \beta = 2\alpha$$

Рассмотрим дифференцирование по β :

$$\frac{\partial f(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = -\sin 2\beta \sin(\beta - \alpha) + \cos^2 \beta \cos(\beta - \alpha) = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{1}{2}$$

Подставляя $\alpha = \beta/2$:

$$\operatorname{tg} \beta \operatorname{tg}(\beta/2) = \frac{1}{2} \Rightarrow 4 \sin^2(\beta/2) \cos(\beta/2) = \cos \beta \cos(\beta/2) \Rightarrow 2 - 2 \cos \beta = \cos \beta$$

Таким образом:

Ответ:

$$\alpha = \frac{\arccos(2/3)}{2} \approx 24.1^\circ \quad \beta = \arccos(2/3) \approx 48.2^\circ$$