

A1 0.70 Найдите возвращающую силу давления, действующую на малую площадь dS поверхности пузырька, при адиабатическом изменении его радиуса от R до $R + x$, ($x \ll R$).

Поскольку процесс для газа в пузырьке адиабатический, а изменение радиуса мало – выполняется уравнение Пуассона:

$$pV^\gamma = p_0V_0^\gamma = \text{const} \quad \gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{7}{5}$$

Поскольку $V = 4\pi(R + x)^3/3$ – уравнение Пуассона можно переписать в следующем виде:

$$p(R + x)^{3\gamma} = p_0R^{3\gamma} = \text{const} \Rightarrow dpR^{3\gamma} + 3\gamma pR^{3\gamma-1}x = 0 \Rightarrow dp = -\frac{3\gamma p_0x}{R}$$

Для возвращающей силы получим:

$$dF = (p_0 - p)dS \approx -dpdS$$

или окончательно:

Ответ:

$$dF = \frac{3\gamma p_0 x dS}{R} = \frac{21 p_0 x dS}{5R}$$

A2 1.00 Найдите энергию, необходимую для изменения x от 0 до некоторого малого значения x_0 .

Первое решение: Для изменения x от 0 до x_0 над элементом поверхности пузырька необходимо совершить работу δA , равную:

$$\delta A = \int_0^{x_0} dF dx = \frac{3\gamma p_0 dS}{R} \int_0^{x_0} x dx = \frac{3\gamma p_0 x_0^2 dS}{2R}$$

Полная площадь S пузырька равна $4\pi R^2$, поэтому:

$$A = 6\pi\gamma p_0 R x^2$$

Поскольку совершённая работа A равна необходимой энергии, получим:

Ответ:

$$W = 6\pi\gamma p_0 R x^2 = \frac{42\pi p_0 R x^2}{5}$$

Второе решение: Изменение внутренней энергии пузырька складывается из необходимой энергии W и работы, совершённой силой давления со стороны воды:

$$\Delta U = W + p_0(V_0 - V) \Rightarrow W = p_0(V - V_0) + \Delta U$$

Найдём внутреннюю энергию U газа в пузырьке как функцию его объёма:

$$U = \frac{pV}{\gamma - 1} = \frac{p_0 V_0}{\gamma - 1} \left(\frac{V}{V_0} \right)^{1-\gamma}$$

Таким образом:

$$W = \frac{4\pi R^3 p_0}{3} \left((1 + \alpha)^3 - 1 + \frac{(1 + \alpha)^{3(1-\gamma)} - 1}{\gamma - 1} \right)$$

где $\alpha = x/R$.

Разложим по формуле Тейлора до α^2 функции $(1 + \alpha)^3$ и $(1 + \alpha)^{3(1-\gamma)}$:

$$(1 + \alpha)^3 = 1 + 3\alpha + 3\alpha^2 + \alpha^3 \approx 1 + 3\alpha + 3\alpha^2$$

$$(1 + \alpha)^{3(1-\gamma)} \approx 1 + \left(\frac{d(1 + \alpha)^{3(1-\gamma)}}{d\alpha} \right)_0 \alpha + \left(\frac{d^2(1 + \alpha)^{3(1-\gamma)}}{d\alpha^2} \right)_0 \frac{\alpha^2}{2}$$

Вычисляя производные:

$$(1 + \alpha)^{3(1-\gamma)} \approx 1 + 3(1 - \gamma)\alpha + \frac{3(1 - \gamma)(2 - 3\gamma)\alpha^2}{2}$$

Таким образом:

$$W \approx \frac{4\pi R^3 p_0}{3} \left(1 + 3\alpha + 3\alpha^2 - 1 + \frac{1 + 3(1 - \gamma)\alpha + \frac{3(1 - \gamma)(2 - 3\gamma)\alpha^2}{2} - 1}{\gamma - 1} \right) = 6\pi\gamma p_0 R^3 \alpha^2$$

Подставляя α , получим:

Ответ:

$$W = 6\pi\gamma p_0 R x^2 = \frac{42\pi p_0 R x^2}{5}$$

A3 ^{1.00} Радиальная скорость воды у поверхности пузырька равна dx/dt . Учитывая, что вода несжимаема, найдите радиальную скорость воды на расстоянии r ($r > R$) от центра пузырька.

Поскольку вода несжимаема – её масса в зазоре между концентрическими сферами радиусами R и $r > R$ должна оставаться постоянной. Тогда объёмы воды, втекающие и вытекающие из данной области в единицу времени, должны быть равны:

$$4\pi R^2 \frac{dx}{dt} = 4\pi r^2 v(r)$$

откуда:

Ответ:

$$v(r) = \frac{R^2}{r^2} \frac{dx}{dt}$$

A4 ^{1.00} Найдите полную кинетическую энергию воды.

Кинетическая энергия воды, расположенной в зазоре между сферами радиусами r и $r + dr$, равна:

$$dE_k = \frac{dm v^2(r)}{2} = \frac{4\pi \rho r^2 dr \cdot v^2(r)}{2} = 2\pi \rho R^4 \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \frac{dr}{r^2}$$

Полная кинетическая энергия воды даётся выражением:

$$E_k = 2\pi \rho R^4 \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \int_R^\infty \frac{dr}{r^2}$$

Вычисляя интеграл, получим:

Ответ:

$$E_k = 2\pi \rho R^3 \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$$

A5 ^{0.50} Если пренебречь массой воздуха, кинетическая энергия, найденная в предыдущем пункте, и будет кинетической энергией колеблющегося пузырька. Найдите частоту колебаний.

Для кинетической и потенциальной энергий системы имеем:

$$W_p = Ax^2 = 6\pi\gamma p_0 R x^2 \quad E_k = B\dot{x}^2 = 2\pi\rho R^3 \dot{x}^2$$

откуда:

$$A = 6\pi\gamma p_0 R \quad B = 2\pi\rho R^3$$

Для циклической частоты колебаний находим:

Ответ:

$$\omega = \sqrt{\frac{3\gamma p_0}{\rho R^2}} = \sqrt{\frac{21 p_0}{5 \rho R^2}}$$

B1 ^{0.20} Найдите вклад поверхностного натяжения в энергию, необходимую для создания в воде пузырька радиуса R .

Ответ:

$$W_\sigma = 4\pi R^2 \sigma$$

B2^{1.60}

Найдите частоту колебаний пузыря, учтя влияние поверхностного натяжения воды. Давление снаружи пузырька считайте равным p_0 .

Обозначим за p_1 давление внутри пузырька в состоянии равновесия и определим его из формула Лапласа:

$$p_1 = p_0 + p_\text{Л} = p_0 + \frac{2\sigma}{R}$$

Запишем уравнение Пуассона для воздуха внутри пузырька:

$$p(R+x)^{3\gamma} = p_1 R^{3\gamma}$$

Далее вновь можно поступить двумя способами.

Первое решение: Продифференцируем уравнение Пуассона:

$$dpR^{3\gamma} + 3\gamma p_1 R^{3\gamma-1} x = 0 \Rightarrow dp = -\frac{3\gamma p_1 x}{R} = -\frac{3\gamma x}{R} \left(p_0 + \frac{2\sigma}{R} \right)$$

Изменение Лапласова давления при этом составит:

$$dp_\text{Л} = -\frac{2\sigma x}{R^2}$$

Тогда для возвращающей силы, действующей на малый элемент площади dS поверхности пузыря, имеем:

$$dF = (p_0 + p_\text{Л} - p)dS = (-dp + dp_\text{Л})dS = \left(\frac{3\gamma p_0}{R} + \frac{2\sigma(3\gamma-1)}{R^2} \right) x dS$$

Аналогично пункту A2:

$$dW = \left(\frac{3\gamma p_0}{R} + \frac{2\sigma(3\gamma-1)}{R^2} \right) dS \int_0^{x_0} x dx = \left(\frac{3\gamma p_0}{R} + \frac{2\sigma(3\gamma-1)}{R^2} \right) \frac{x_0^2 dS}{2}$$

откуда:

$$W = 2\pi R^2 \left(\frac{3\gamma p_0}{R} + \frac{2\sigma(3\gamma-1)}{R^2} \right) x_0^2$$

Выражение для кинетической энергии при этом остаётся тем же, что и в части A:

$$E_k = 2\pi \rho R^3 \dot{x}^2$$

Таким образом:

Ответ:

$$\omega = \sqrt{\frac{3\gamma p_0}{\rho R^2} + \frac{2\sigma(3\gamma-1)}{\rho R^3}} = \sqrt{\frac{21p_0}{5\rho R^2} + \frac{32\sigma}{5\rho R^3}}$$

Второе решение: Аналогично пункту A2:

$$W - p_0(V - V_0) = \Delta U + \Delta W_\sigma \Rightarrow W = p_0(V - V_0) + \Delta U + \Delta W_\sigma$$

откуда:

$$W = \frac{4\pi p_0 R^3}{3} \left((1+\alpha)^3 - 1 + \left(1 + \frac{2\sigma}{p_0 R} \right) \frac{(1+\alpha)^{3(1-\gamma)} - 1}{\gamma - 1} \right) + 4\pi R^2 \sigma ((1+\alpha)^2 - 1)$$

Используя разложения, полученные в пункте A2:

$$W \approx \frac{4\pi p_0 R^3}{3} \left(3\alpha + 3\alpha^2 + \left(1 + \frac{2\sigma}{p_0 R} \right) \left(-3\alpha + \frac{3(3\gamma-2)\alpha^2}{2} \right) \right) + 4\pi R^2 \sigma (2\alpha + \alpha^2)$$

После преобразования имеем:

$$W \approx 6\pi \gamma p_0 R^3 \alpha^2 + 4\pi(3\gamma-2)R^2 \sigma \alpha^2 = (6\pi \gamma p_0 R + 4\pi(3\gamma-2)\sigma) \alpha^2$$

Выражение для кинетической энергии при этом остаётся тем же, что и в части A:

$$E_k = 2\pi \rho R^3 \dot{x}^2$$

Таким образом:

Ответ:

$$\omega = \sqrt{\frac{3\gamma p_0}{\rho R^2} + \frac{2\sigma(3\gamma - 1)}{\rho R^3}} = \sqrt{\frac{21p_0}{5\rho R^2} + \frac{32\sigma}{5\rho R^3}}$$