

A1 2.50

Найдите полную гидродинамическую силу $\langle F \rangle$, действующую на бумеранг, усредненную по времени за один оборот. Выразите ответ через v, ω, R, a и γ .

Пусть лопасть повернута относительно вектора скорости $\vec{v}$ центра бумеранга на угол φ в направлении против часовой стрелки, а x – расстояние от центра бумеранга до точки P лопасти. Тогда для перпендикулярной краю лопасти компоненты скорости точки P имеем:

$$v_{\perp P} = \omega x - v \sin \varphi.$$

Для силы $dF_{\perp}$, действующей на элемент лопасти длиной dx , имеем:

$$dF_{\perp} = \gamma v_{\perp P}^2 \Delta A = \gamma v_{\perp P}^2 a dx = \gamma (\omega x - v \sin \varphi)^2 a dx.$$

Проинтегрируем полученное выражение:

$$F_{\perp} = \gamma a \int_0^R (\omega^2 x^2 - 2\omega v \sin \varphi x + v^2 \sin^2 \varphi) dx = \gamma a \left(\frac{\omega^2 R^3}{3} - \omega v \sin \varphi R^2 + v^2 \sin^2 \varphi R \right).$$

Поскольку угловая скорость является постоянной – усреднение по времени эквивалентно усреднению по углу φ :

$$\langle F_{\perp} \rangle = \gamma a \left(\frac{\omega^2 R^3}{3} - \omega v R^2 \langle \sin \varphi \rangle + v^2 R \langle \sin^2 \varphi \rangle \right).$$

Проведём соответствующие усреднения:

$$\langle \sin \varphi \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = 0.$$

$$\langle \sin^2 \varphi \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \frac{1}{2}.$$

Таким образом:

$$\langle F_{\perp} \rangle = \gamma a R \left(\frac{\omega^2 R^2}{3} + \frac{v^2}{2} \right).$$

Поскольку лопастей четыре и для каждой из них среднее значение силы одинаково:

$$\langle F \rangle = 4 \langle F_{\perp} \rangle.$$

Таким образом:

Ответ:

$$\langle F \rangle = \gamma a R \left(2v^2 + \frac{4\omega^2 R^2}{3} \right).$$

A2 2.50

Найдите суммарный момент гидродинамических сил $\langle \vec{\tau} \rangle$, действующих на бумеранг, относительно его центра. Момент нужно усреднить по времени за один оборот. Выразите ответ через v, ω, R, a и γ . Укажите, как направлен усреднённый момент относительно направления вектора скорости его центра.

Пусть $\vec{e}_r$ и $\vec{e}_{\varphi}$ – единичные векторы цилиндрической системы координат с началом в центре бумеранга. Тогда для элемента момента силы $d\vec{\tau}$ относительно центра бумеранга имеем:

$$d\vec{\tau}_{\perp} = [\vec{r} \times d\vec{F}_{\perp}] = [\vec{e}_z \times \vec{e}_r] x dF_{\perp} = \vec{e}_{\varphi} x dF_{\perp} = \vec{e}_{\varphi} \gamma (\omega x - v \sin \varphi)^2 a dx \cdot x.$$

Проинтегрируем полученное выражение:

$$\vec{\tau}_{\perp} = \vec{e}_{\varphi} \gamma a \int_0^R (\omega^2 x^2 - 2\omega v \sin \varphi x + v^2 \sin^2 \varphi) x dx = \vec{e}_{\varphi} \gamma a R^2 \left(\frac{\omega^2 R^2}{4} - \frac{2\omega R v \sin \varphi}{3} + \frac{v^2 \sin^2 \varphi}{2} \right).$$

Теперь введём систему координат xu таким образом, что ось x направлена вдоль направления $\varphi = 0$, а ось y – вдоль направления $\varphi = \pi/2$. Тогда имеем:

$$\tau_{\perp x} = -\tau_{\perp} \sin \varphi \quad \tau_{\perp y} = \tau_{\perp} \cos \varphi.$$

Проведём усреднения по времени.

$$\langle \tau_{\perp x} \rangle = -\frac{\gamma a R^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\omega^2 R^2}{4} - \frac{2\omega R v \sin \varphi}{3} + \frac{v^2 \sin^2 \varphi}{2} \right) \sin \varphi d\varphi.$$

Интегралы от тригонометрических функций в нечётных степенях обращаются в ноль, поскольку эти функции являются нечётными, интеграл от $\sin^2 \varphi$ за период был вычислен в предыдущем пункте и равен π .

Таким образом:

$$\langle \tau_{\perp x} \rangle = \frac{\gamma a \omega v R^3}{3}.$$

$$\langle \tau_{ly} \rangle = \frac{\gamma a R^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\omega^2 R^2}{4} - \frac{2\omega R v \sin \varphi}{3} + \frac{v^2 \sin^2 \varphi}{2} \right) \cos \varphi d\varphi.$$

Поскольку $\cos \varphi d\varphi = d \sin \varphi = dt$, данное выражение можно переписать следующим образом:

$$\langle \tau_{ly} \rangle = \frac{\gamma a R^2}{2\pi} \int_0^0 \left(\frac{\omega^2 R^2}{4} - \frac{2\omega R v t}{3} + \frac{v^2 \sin^2 t^2}{2} \right) dt = 0.$$

Обратим внимание, что вектор $\vec{e}_x$ направлен вдоль вектора скорости $\vec{v}$, поэтому:

$$\langle \vec{\tau}_л \rangle = \frac{\gamma a \omega R^3 \vec{v}}{3}.$$

Средний момент сил, действующий на одну лопасть, одинаков для каждой из них, и, поскольку их 4:

$$\langle \vec{\tau} \rangle = 4 \langle \vec{\tau}_л \rangle.$$

Таким образом:

Ответ:

$$\langle \vec{\tau} \rangle = \frac{4\gamma a \omega R^3 \vec{v}}{3}.$$

A3 3.00

Чему должно быть равно отношение $v/(\omega R)$ в момент броска бумеранга, чтобы в течение последующего движения центр бумеранга двигался по горизонтальной круговой траектории?

Считайте, что период вращения бумеранга $2\pi/\omega$ много меньше периода кругового движения центра масс. Это позволяет использовать найденные ранее усреднённые по периоду величины $\langle \vec{F} \rangle$ и $\langle \vec{\tau} \rangle$.

Сила $\vec{F}$, действующая на бумеранг, направлена перпендикулярно его плоскости, поэтому при движении по круговой траектории модуль скорости бумеранга остаётся постоянным. Значит, постоянной остаётся и угловая скорость $\vec{\Omega}$ перемещения центра бумеранга по круговой траектории. Важно отметить, что поскольку сила всегда направлена перпендикулярна плоскости бумеранга, его плоскость также должна вращаться с постоянной угловой скоростью $\vec{\Omega}$. Определим модуль угловой скорости Ω :

$$M \langle \dot{\vec{v}} \rangle = \langle \vec{F} \rangle \Rightarrow M \Omega v = \langle F \rangle = \gamma a R \left(2v^2 + \frac{4\omega^2 R^2}{3} \right) \Rightarrow \Omega = \frac{\gamma a R}{M v} \left(2v^2 + \frac{4\omega^2 R^2}{3} \right).$$

Поскольку средний момент сил $\langle \vec{\tau} \rangle$ направлен вдоль скорости центра бумеранга, а угловая скорость вращения плоскости бумеранга должна оставаться постоянной и равной $\vec{\Omega}$ – момент сил $\vec{\tau}$ перпендикулярен моменту импульса $\vec{L}$ бумеранга относительно его центра, который вращается под действием данного момента сил с той же угловой скоростью $\vec{\Omega}$.

Таким образом, закон изменения момента импульса относительно центра бумеранга выглядит следующим образом:

$$\langle \vec{\tau} \rangle = \langle \dot{\vec{L}} \rangle = [\vec{\Omega} \times \vec{L}] = \Omega L_z \vec{e}_v = I_z \omega \Omega \vec{e}_v,$$

или же:

$$\Omega = \frac{\langle \tau \rangle}{I_z \omega}.$$

Момент инерции бумеранга относительно оси z равен $I_z = MR^2/3$, поскольку бумеранг образован четырьмя стержнями длиной R с общей точкой в центре бумеранга, откуда:

$$\Omega = \frac{4\gamma a v R}{M}.$$

Приравнивая выражения для Ω , получим:

$$4v^2 = 2v^2 + \frac{4\omega^2 R^2}{3},$$

откуда:

Ответ:

$$\frac{v}{\omega R} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

A4 1.50

Выразите радиус r траектории центра масс бумеранга через γ и параметры бумеранга.

Для радиуса круговой траектории r имеем:

$$r = \frac{v}{\Omega},$$

Используя выражение для Ω , полученное из уравнения динамики вращательного движения, находим:

Ответ:

$$r = \frac{M}{4\gamma a R}.$$

A5^{0.50}

Предположим, что мы сделали два похожих бумеранга из одинакового материала, таких, что каждый размер одного из них в два раза меньше соответствующего размера второго. Чему равно отношение радиусов r_2/r_1 их круговых траекторий?

Для отношения радиусов r_2/r_1 имеем:

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{M_2}{M_1} \frac{a_1 R_1}{a_2 R_2}.$$

Поскольку $M \sim R^3$ и $a \sim R$, имеем:

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{R_2}{R_1},$$

или же

Ответ:

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{2}$$