

A1^{0.50} Для эллипса можно определить параметр эксцентриситет $e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$, где a и b – большая и малая полуоси эллипса соответственно. Найдите эксцентриситет e орбиты кометы Чурюмова-Герасименко.

При прохождении перигелия и афелия орбиты лучевая скорость кометы $v_r = 0$. Из графика: $q = 1.24$ а.е., $Q = 5.68$ а.е., откуда $\frac{1+e}{1-e} = \frac{Q}{q} = 4.58$. Итого $e = \frac{Q-q}{Q+q} = 0.64$.

Ответ:

$$e = \frac{Q - q}{Q + q} = 0.64$$

A2^{1.00} Полная энергия тела, которое движется по эллиптической орбите, не зависит от ее эксцентриситета, а зависит только от длины большой полуоси a . Найдите скорость v кометы в зависимости от расстояния r . Ответ выразите через a , r и физические постоянные.

Удобно рассмотреть круговую орбиту радиусом a . Тело движется по ней с "первой космической" скоростью $v = \sqrt{\frac{GM}{a}}$, которую можно найти из II закона Ньютона $\frac{GM}{a^2} = \frac{v^2}{a}$. Тогда полная энергия

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{a} = -\frac{GMm}{2a},$$

откуда нетрудно выразить $v = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}$.

Ответ:

$$v = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}$$

A3^{1.00} Найдите лучевую скорость v_r в зависимости от расстояния r . Ответ выразите через a , r , e и физические постоянные.

По теореме Пифагора $v_r^2 = v^2 - v_\tau^2$, где v_τ – тангенциальная скорость кометы. Входя из ЗСМИ $L = mv_\tau r$, поэтому $v_r^2 = v^2 - \frac{L^2}{m^2 r^2}$. Найдём L с помощью равенства $v = v_\tau$ в перигелии и афелии:

$$v^2 = GM \left(\frac{2}{a(1-e)} - \frac{1}{a} \right) = \frac{L^2}{m^2 a^2 (1-e)^2}.$$

В итоге получим $v_r^2 = \frac{L^2}{m^2 r^2} = GM \frac{a(1-e^2)}{r^2}$ и $v_r = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} - \frac{a(1-e^2)}{r^2} \right)}$.

Ответ:

$$v_r = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} - \frac{a(1-e^2)}{r^2} \right)}$$

A4^{0.50} Используя график, найдите значение длины большой полуоси a орбиты кометы.

В точке $r_0 = a(1 - e^2)$ выполняется $\frac{dv_r}{dr} = 0$. В тоже время касательная к графику горизонтальна при $r_0 = 2.04$ а.е., откуда $a = 3.46$ а.е..

Ответ:

$$a = 3.46 \text{ а.е.}$$

B1^{0.40} Когда комета пройдет перигелий в следующий раз?

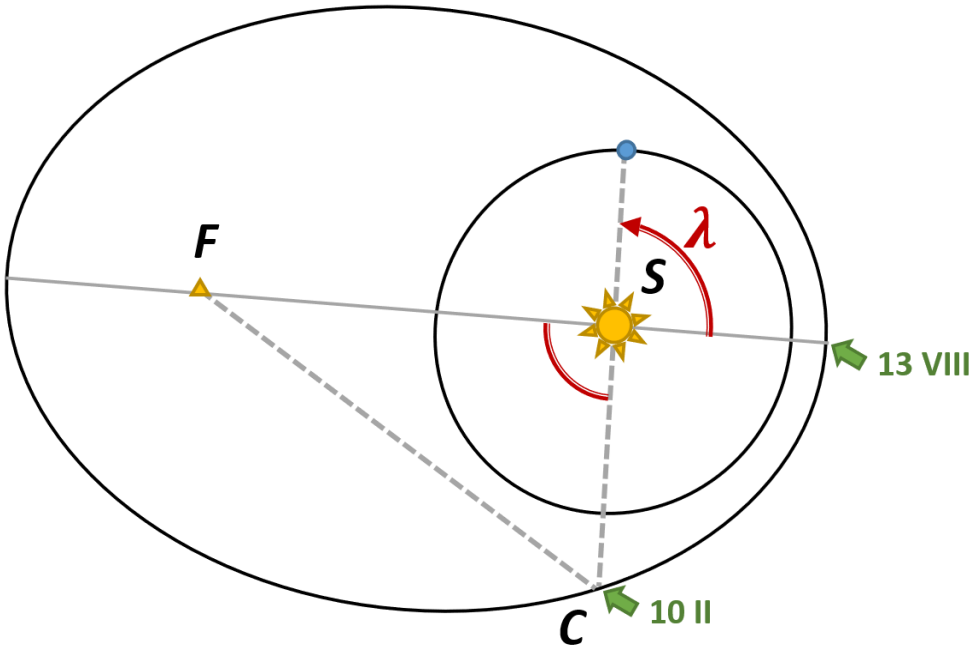
По третьему закону Кеплера период обращения кометы вокруг Солнца составляет $T = \left(\frac{a}{\text{а.е.}} \right)^{3/2}$ лет = 2350 сут.

13 августа 2015 года + T = середина января 2022 года

Ответ: середина января 2022 года

В2^{2.50} Оцените, когда можно ожидать ближайшее тесное сближение кометы с Землей (расстояние при тесном сближении не превышает минимально возможное более, чем на 15%). Плоскости орбит Земли и кометы совпадают, как и направления угловых скоростей. Орбиту Земли считать круговой.

Положение Земли относительно перицентра орбиты кометы однозначно определяется (см. рис.) полярным углом $\lambda(t)$.



Найдём величину λ_c этого угла на 10 февраля 2015 года. В треугольнике C (комета) — S (Солнце) — F (второй фокус орбиты эллипса) известны все три стороны:

$$\begin{aligned} |SC| &= d_0 - 1\text{a.e.} = 2.70\text{a.e.}, \\ |SF| &= 2ae = 4.43\text{a.e.}, \\ |FC| &= 2a - |SC| = 4.22\text{a.e.} \end{aligned}$$

По теореме косинусов вычислим $\lambda_c = 68^\circ$. Тогда на момент прохождения кометой перигелия в 2015 году:

$$\lambda_{p,0} \simeq \lambda_0 + \frac{13 \text{ августа} - 10 \text{ февраля}}{365} \cdot 360^\circ = 68^\circ + 180^\circ = -112^\circ.$$

Поскольку период обращения кометы вокруг Солнца составляет 6.44 земных лет, $\lambda_{p,i}$ отстоят друг от друга на угол $\Delta\lambda = 0.44 \cdot 360^\circ = 180^\circ - 21.5^\circ$.

Уже через три периода (см. таблицу) наступит момент, когда в момент прохождения перигелия Земля окажется между Солнцем и кометой, почти на одной прямой:

$$13 \text{ августа } 2015 \text{ года} + 3T = \text{ноябрь} - \text{декабрь } 2034 \text{ года}.$$

i	$\lambda_{p,i}$
0	-112°
1	46.5°
2	-155°
3	3.5°

Ответ: ноябрь-декабрь 2034 года

С1^{0.10} Запишите текущее перигелийное расстояние q кометы.

Ответ:

$$q = 1.24 \text{ а. е.}$$

С2^{2.00} Найдите изменение $\Delta(v^2)$ квадрата модуля скорости кометы при взаимодействии с Юпитером. Ответ выразите через $q, q_l, v_{l,max}, e$. Получите также численное значение $\Delta(v^2)$.

Орбитальная скорость тела зависит только от его гелиоцентрического расстояния r и большой полуоси орбиты a (пункт A2). При тесном сближении с Юпитером $r = R$.
Поскольку эксцентриситет орбиты остался прежним, старая и новая орбита подобны: $\frac{a_l}{a} = \frac{q_l}{q}$, откуда $a_l = 7.53 \text{ а.е.}$.

Выражение для искомой величины записать нетрудно:

$$\Delta v^2 = GM \left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a} - \frac{2}{R} + \frac{1}{a_l} \right) = GM \frac{a - a_l}{a \cdot a_l}.$$

Осталось найти значение постоянной Кеплера GM . Вновь обратимся к данным графика: $v_{r,\max} = 13.4 \text{ км/с}$ достигается (пункт A4) при $r = a(1 - e^2)$. При этом выражение для v_r^2 принимает вид

$$v_{r,\max}^2 = GM \left(\frac{2}{a(1 - e^2)} - \frac{1}{a} - \frac{a(1 - e^2)}{(a^2(1 - e^2)^2)} \right) = GM \frac{e^2}{a(1 - e^2)}$$

В итоге имеем

$$\Delta v^2 = \frac{1 - e^2}{e^2} \cdot \frac{a - a_l}{a_l} \cdot v_{r,\max}^2 = -140 (\text{км/с})^2.$$

Ответ:

$$\Delta v^2 = \frac{1 - e^2}{e^2} \cdot \frac{a - a_l}{a_l} \cdot v_{r,\max}^2 = -140 (\text{км/с})^2$$

СЗ 1.00 Найдите угол $\Delta\psi$, на который повернулся вектор скорости кометы в результате описанного взаимодействия, если известно, что он не превышает 30° . Считайте, что Юпитер движется по круговой орбите радиуса $R = 5,20 \text{ а.е.}$

Рассчитаем (с точностью до знака) скорости $v_r(R)$ и $v_\tau(R)$ при движении по старой и новой орбитам (пункт A3); для упрощения вычислений положим $GM = 1 \text{ а.е.}$.
По этим данным рассчитаем угол, который скорость кометы образовывала с лучом зрения:

$ \psi = \arctan \frac{v_\tau}{v_r}$				
$r = R = 5.20 \text{ а.е.}$				
$a, \text{ а.е.}$	e	$v_r, \text{ у.е.}$	$v_\tau, \text{ у.е.}$	$ \psi $
7.53	0.64	0.296	0.405	54°
3.46		0.142	0.275	63°

Ответ:

$$\Delta\psi = 9^\circ$$