

Road to IPhO

Аналемма

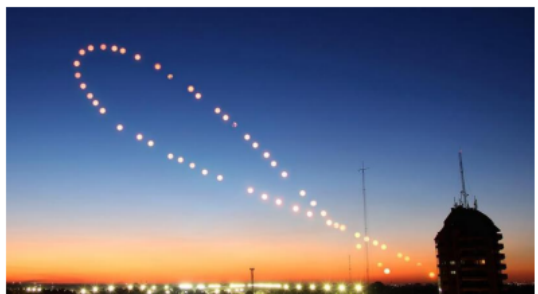
Люди древности и средневековья определяли время по положению Солнца на небе, связывали с ним сроки религиозных праздников и распорядок дня. Многие обряды совершались в полдень, который определялся как время, когда солнце занимает наивысшее положение на небосводе. В это время луч солнца, проходящий через отверстие в крыше храма или собора пересекал линию меридиана на полу, указывающую направление «север–юг» (см. рис.). В английском языке сохранились берущие начало в это время латинские обозначения времени до (a.m., ante meridiem) и после полудня (p.m., post meridiem). По угловой высоте солнца в полдень (как и по положению звезд в полночь) путешественники прошлого с помощью специальных астрономических приборов определяли географическую широту судна.

Система отсчета времени, связанная с солнцем, называется «истинным солнечным временем» (ИСВ) – в ней положение солнца определяется по азимуту, соответствующему положению солнца на небесной сфере. При появлении точных механических часов оказалось несложным убедиться, что истинное солнечное время неравномерно – в течение года продолжительность истинных солнечных суток (время между солнечными полуднями) меняется. Так появилась система усредненного солнечного времени (УСВ) – продолжительность суток в такой системе совпадает со средней продолжительностью суток в течение года, отсчет времени идет однородно.

Если в определенный момент синхронизировать усредненное солнечное время с истинным (в момент солнечной кульминации выставить на механических часах полдень), то в течение года возникнет расхождение между временем, определяемым двумя разными способами: например, солнце в 12:00 по местному времени в разные дни то западнее, то восточнее меридиональной линии. Если в течение года отмечать положение солнечного луча солнца в 12:00, вместо прямой линии получится «восьмерка» (см. рис. 16). Очевидно, что эта восьмерка связана с положением солнца на небесной сфере, и если, применяя более современные технологии, делать в определенном месте фотографии небосвода с шагом в 12 часов, то солнце в течение года также описывает кривую, имеющую форму «восьмерки» (см. рис.), которую мы будем называть аналеммой.

В задаче предлагается проанализировать различные факторы, влияющие на расхождение между ИСВ и УСВ, оценить его величину и объяснить форму аналеммы. Хотя точный расчет искомого расхождения сложен и приводит к громоздким результатам, на практике это расхождение с хорошей точностью описывается суммой нескольких синусоид, параметры которых мы предлагаем вам найти. Для простоты будем рассматривать не Землю, а другую очень похожую планету (см. рис. 1), вращающуюся вокруг своей оси с периодом в $\tau = 24$ земных часа, год на которой длится τN_0 . Ось собственного вращения планеты образует с нормалью к плоскости орбиты малый угол θ ($\theta \ll 1$). Считайте его заданным. Также считайте, что задан эксцентриситет e .

Будем считать, что в первый день года ($N = 0$) планета находится ближе всего к звезде, а ось вращения лежит в плоскости, заданной радиус-вектором «планета–звезда» и нормалью к плоскости траектории. (Для Земли это условие неверно, хотя отклонение и невелико.) Направления вращения планеты вокруг звезды и вокруг своей оси совпадают (против часовой стрелки, если смотреть с «северного» полюса эклиптики). В северном полушарии в начале года день короче ночи.



Road to IPhO

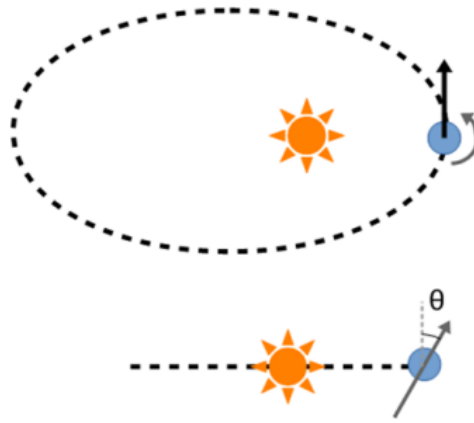


Рис. 1. Положение $N = 0$ в первый день года. Орбита (с эксцентриситетом e) и ось вращения (наклоненная под углом θ к вектору нормали к траектории) гипотетической планеты, рассматриваемой в задаче. Направления вращения планеты вокруг звезды и вокруг собственной оси совпадают (против часовой стрелки, если смотреть с северного полюса эклиптики).

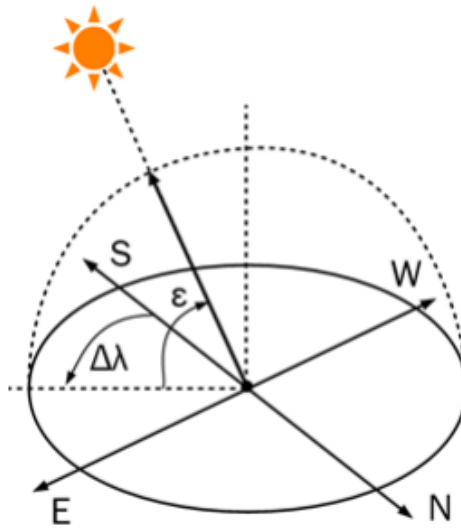


Рис. 2. Угловая система небесных координат: ε – высота солнца, $\Delta\lambda$ – азимутальное отклонение от среднего (южного) направления на полуденное солнце.

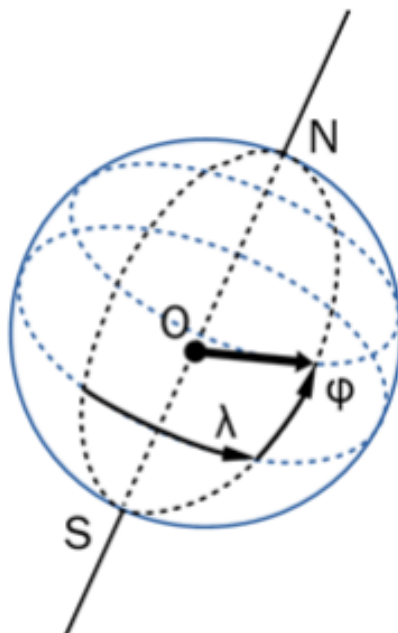


Рис. 3. Долгота λ и широта φ некоторой точки на поверхности планеты.

Road to IPhO

Часть А. Максимальная высота Солнца (1 балл)

- A1** Наибольшая угловая высота солнца в течение суток зависит от времени года и от широты, на которой находится наблюдатель. Решите задачу, достойную древнего мореплавателя и найдите коэффициенты A_0 , k_0 и ϕ_0 в приближенном выражении, описывающем зависимость отклонения этой угловой высоты (рис. 2) от усредненного по всем дням года значения (N – номер дня). Орбиту считайте круговой. **0.9**

$$\Delta\varepsilon = A_0 \sin(k_0 N + \phi_0)$$

- A2** Нарисуйте, какую кривую за год описывал бы луч света на полу храма, положения которого замеряются каждый день в 12:00 по ИСВ, отметьте положение сторон света на рисунке. (Стороны света на рассматриваемой планете определяются так же, как и на земле, в соответствии с направлением вращения планеты вокруг своей оси). **0.1**

Часть В. Эксцентричная орбита при перпендикулярной оси (3 балла)

В части В считайте, что ось планеты перпендикулярна плоскости орбиты ($\theta = 0$), а орбита близка к окружности ($0 < e \ll 1$).

- B1** Укажите, в какой точке орбиты истинные солнечные сутки будут длиннее всего? Короче всего? **0.1**

- B2** На сколько самые длинные истинные сутки длиннее самых коротких? **2.0**

- B3** Считая, что в первый день в году ($N = 0$) планета находится ближе всего к звезде, найдите параметры A_1 , k_1 и ϕ_1 приближенного уравнения, описывающего разницу в продолжительности истинных и усредненных солнечных суток в зависимости от номера дня в году N ($0 \leq N \leq 364$): **0.6**

$$t_{\text{сут ИСВ}} - t_{\text{сут УСВ}} = A_1 \sin(k_1 N + \phi_1)$$

- B4** Какая разница $\Delta_1(N)$ между ИСВ и УСВ накопится за N дней, если в первый день в году системы были синхронизированы? **0.2**

- B5** Какой величины достигает наибольшее в течение года расхождение между ИСВ и УСВ ($\Delta_{1\text{max}}$)? **0.1**

Часть С. Наклонная ось при круговой орбите (3 балла)

Пусть теперь планета совершает движение по круговой орбите ($e = 0$), а ось собственного вращения наклонена от нормали к плоскости траектории на малый угол θ ($\theta \ll 1$). Будем считать, что в первый день в году ($N = 0$) ось собственного вращения лежит в плоскости, образованной нормалью к плоскости траектории и радиус-вектором, соединяющим центры звезды и планеты. Будем считать, что направления вращения планеты вокруг звезды и вокруг своей оси совпадают (оба движения осуществляются против часовой стрелки, если смотреть с «северного» полюса эклиптики). В северном полушарии в начале года день короче ночи.

- C1** Отметим точку на экваторе планеты, в которой звезда в некоторый момент времени находится в зените. Припишем этой точке нулевую долготу $\lambda = 0$ и будем следить за точками, для которых звезда будет в зените ровно через 1 сутки УСВ, 2 суток УСВ и т.д. Эти точки образуют на поверхности планеты некоторую кривую, которую можно задать в терминах широты φ и долготы λ (см. рис. 3). Получите формулу этой кривой. **1.0**

- C2** Пусть в некоторый момент при построении кривой, описанной в пункте C1, в точке с долготой λ звезда оказалась в зените. Найдите $\Delta\lambda/\Delta t$, где $\Delta\lambda$ – изменение долготы точки за время Δt равное одним суткам. **0.2**

Road to IPhO

- C3** Найдите параметры A_2 , k_2 и ϕ_2 приближенного уравнения, наилучшим образом описывающие разницу между продолжительностью истинных и усредненных солнечных суток на такой планете: **1.5**

$$t_{\text{сут ИСВ}} - t_{\text{сут УСВ}} = A_2 \sin(k_2 N + \phi_2).$$

- C4** Какая разница $\Delta_2(N)$ между ИСВ и УСВ накопится за N дней, если в первый день в году обе системы были синхронизированы? **0.2**

- C5** Какой величины $\Delta_{2\text{max}}$ достигает наибольшее в течение года расхождение между ИСВ и УСВ? **0.1**

Часть D. Комбинация вкладов (3 балла)

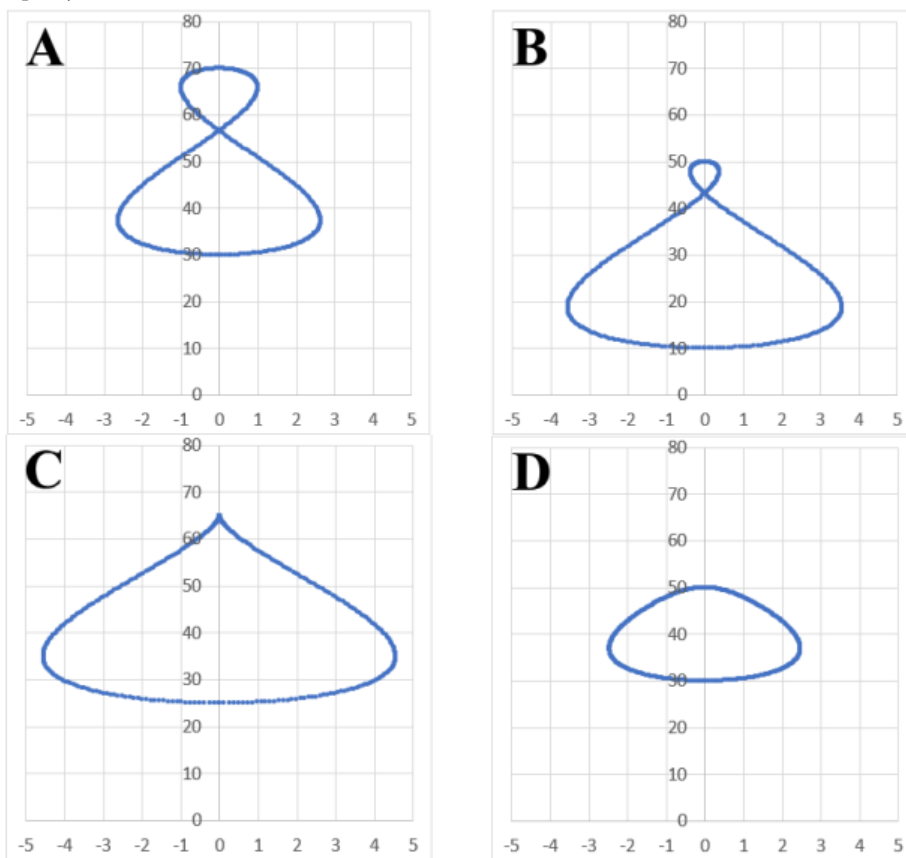
В части D для простоты будем считать, что вклады от наклона оси и от эллиптичности орбиты в угловые координаты солнца на небесной сфере (см. рис.) складываются.

- D1** Получите зависимости обеих угловых координат солнца $\varepsilon(N)$ и $\Delta\lambda(N)$ в полдень по УСВ (12:00) от номера дня в году N на широте φ . **1.0**

- D2** Схематично нарисуйте в угловых координатах небесной сферы ε и $\Delta\lambda$ (с точностью до константы) аналеммы для случаев, описанных в частях B и C. **1.0**

- D3** С помощью рисунков и формул опишите метод, позволяющий из параметров аналеммы определить e и θ . **0.2**

На рисунке ниже приведены аналеммы четырёх планет. По горизонтальной и вертикальной осям отложены $\Delta\lambda$ и ε в градусах, соответственно.



- D4** Определите числовые значения e и θ для планет, аналеммы которых приведены на рисунке, а также укажите, на каких широтах φ проводились измерения приведенных кривых (все измерения проводились в северном полушарии). По горизонтальной и вертикальной осям отложены $\Delta\lambda$ и ε в градусах соответственно. **0.8**