

A1 1.10 Электрическое поле приводит к согласованному смещению $\vec{r}(t)$ электронов в направлении поля. Определите зависимость $\vec{r}(t)$ и вектор поляризации среды $\vec{P}(t)$ в установившемся режиме.

Запишем второй закон Ньютона для электрона, движущегося в указанном поле ($e > 0$):

$$m \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}(t) = -e \vec{E}_0 \sin(\omega t)$$

Интегрируя уравнение движения, с условиями, что координата и скорость ограничены при $t \rightarrow \infty$, получаем ответ на первый вопрос

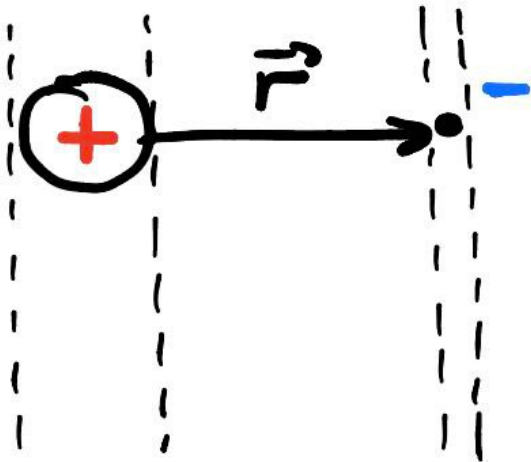
Ответ:

$$\vec{r}(t) = \frac{e \vec{E}_0}{m \omega^2} \sin \omega t$$

В результате перераспределения зарядов среда приобретает дипольный момент. Дипольный момент направлен противоположно вектору $\vec{r}$. Таким образом, искомый вектор поляризации (как дипольный момент единицы объема) равен:

$$\vec{P} = -\frac{\vec{r} \cdot e(nrS)}{rS} = -ne\vec{r},$$

где S — площадь поперечного сечения в плоскости перпендикулярной $\vec{r}$. Итоговый ответ:



Ответ:

$$\vec{P}(t) = -\frac{ne^2 \vec{E}_0}{m \omega^2} \sin \omega t$$

A2 0.30 Вычислите диэлектрическую проницаемость металла $\varepsilon(\omega)$ и постройте график этой зависимости.

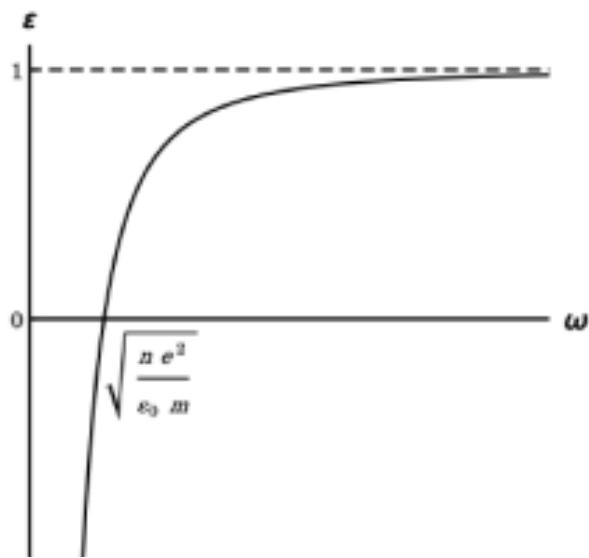
Используя соотношения между вектором электрической индукции, напряженности и поляризации, получим:

$$\varepsilon_0 \varepsilon(\omega) \vec{E}_0 = \varepsilon \vec{E}_0 + \vec{P},$$

учитывая ответ пункта A1, получаем ответ:

Ответ:

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m \omega^2}$$



В1 ^{2.60} Определите поле $\vec{E}_{in}$ внутри шара и его дипольный момент $\vec{d}_0$.

Этот пункт задачи представляет собой классическую задачу по нахождению поля внутри диэлектрического шара, помещенного в постоянное электрическое поле. Одно из решений приводится ниже.

Рассмотрим вспомогательный случай: найдем электрическое поле внутри равномерно заряженного шара. Из соображений симметрии поле должно быть направлено по радиусу. Запишем теорему Гаусса для сферической поверхности произвольного радиуса внутри шара:

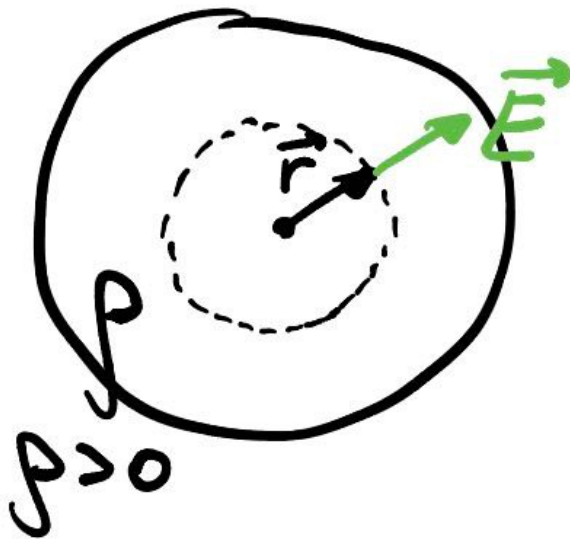
$$4\pi r^2 E = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \frac{1}{\varepsilon_0},$$

откуда

$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0},$$

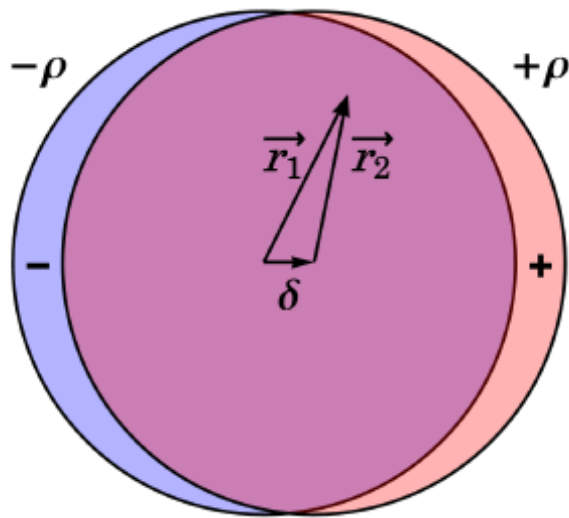
или в векторном виде:

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \vec{r}.$$



В соответствии с моделью, предложенной в условии, рассмотрим систему как два однородно заряженных шара, сдвинутых друг относительно друга на малый вектор $\vec{\delta}$, помещенных во внешнее поле $\vec{E}_0$. В произвольной точке фиолетовой области рассчитаем поле:

$$\vec{E}_{in} = \vec{E}_0 + \frac{-\rho}{3\varepsilon_0} \vec{r}_1 + \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \vec{r}_2 = \vec{E}_0 + \frac{\rho}{3\varepsilon_0} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{E}_0 - \frac{\rho \vec{\delta}}{3\varepsilon_0}.$$



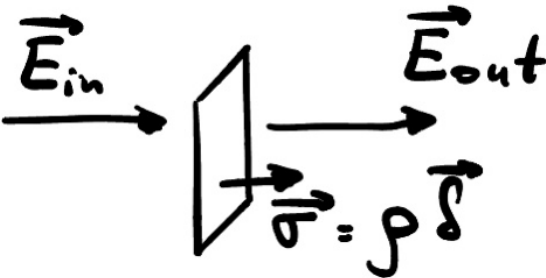
Запишем теперь граничные условия в точке «+» шара. Граничное условие на скачок вектора напряженности при наличии заряда:

$$\vec{E}_{in} + \frac{\vec{\sigma}}{\varepsilon_0} = \vec{E}_{out},$$

где $\vec{\sigma} = \rho \vec{\delta}$ — поверхностная плотность заряда, умноженная на единичный вектор, направленный по $\vec{\delta}$. Так удобно записать все в векторном виде. Т.к. в точке «+» нет свободных зарядов, непрерывна нормальная компонента вектора $\vec{D}$, и с учетом связи напряженностей через диэлектрическую проницаемость:

$$\vec{E}_{out} = \varepsilon \vec{E}_{in}.$$

Решая систему из трех уравнений, приведенных выше, относительно $\vec{E}_{in}$, $\vec{E}_{out}$ и $\vec{\sigma}$, получим:



Ответ:

$$\vec{E}_{in} = \frac{3}{\varepsilon + 2} \vec{E}_0$$

Дипольный момент системы равен заряду шаров, умноженному на вектор $\vec{\delta}$, т.е.

$$\vec{d}_0 = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \cdot \vec{\delta} = \frac{4}{3} \pi R^3 \vec{\sigma},$$

а вектор $\vec{\sigma}$ также получим из решения системы уравнений выше. Таким образом:

Ответ:

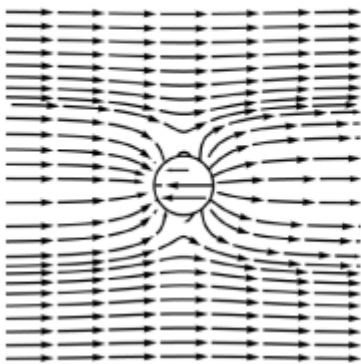
$$\vec{d}_0 = 4 \pi R^3 \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon - 1)}{\varepsilon + 2} \vec{E}_0$$

B2^{0.70}

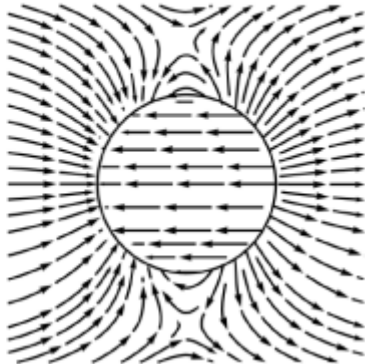
Нарисуйте картину силовых линий электрического поля в системе (внутри, вблизи и вдали от шара), считая $\varepsilon(\omega) = -3$.

Ответ:

Far distances:



Near distances:



B3^{0.20} При некотором значении $\varepsilon(\omega_{res}) = \varepsilon_{res}$ амплитуда электрического поля внутри шара $|\vec{E}_{in}|$ начинает неограниченно возрастать. Определите значение ε_{res} .

Ответ:

$$\varepsilon_{res} = -2$$

B4^{0.60} Осциллирующий диполь излучает энергию. Оцените мощность I этих потерь, используя анализ размерностей и тот факт, что интенсивность дипольного излучения зависит только от амплитуды дипольного момента $|\vec{d}_0|$, частоты его колебаний ω_{res} , скорости распространения волн c и электрической постоянной ε_0 .

$$I = \varepsilon_0^\alpha \cdot |\vec{d}_{sp}|^\beta \cdot \omega_{res}^\gamma \cdot c^\zeta$$

Запишем размерности величин

$$\begin{aligned} [I] &= \text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-1} \\ [\varepsilon_0] &= \text{Кл}^2 \cdot \text{Н}^{-1} \cdot \text{м}^{-2} \\ [d] &= \text{Кл} \cdot \text{м} \\ [\omega] &= \text{с}^{-1} \\ [c] &= \text{м} \cdot \text{с}^{-1} \end{aligned}$$

Решая систему, получим $\alpha = -1, \beta = 2, \gamma = 4, \zeta = -3$.

Ответ:

$$I = \frac{|\vec{d}_{sp}|^2 \omega_{\text{res}}^4}{\varepsilon_0 c^3}$$

B5^{3.80} Оцените среднюю энергию, вкачиваемую в систему за счет внешнего поля в условиях плазмонного резонанса при $\omega = \omega_{res}$. Из условия баланса энергии оцените амплитуду поля внутри шара в резонансе.

Оценим энергию, вкачиваемую в систему, как среднюю потенциальную энергию диполя за период.

$$W = -(\vec{d}, \vec{E}) = d_0 E_0 \cos^2 \omega t = \frac{d_0 E_0}{2} (1 - \cos 2\omega t)$$

$$\overline{W} = \frac{d_0 E_0}{2}$$

Таким образом, средняя мощность за период равна

$$P = \overline{W} / T = \frac{d_0 E_0 \omega_{res}}{4\pi}$$

и с точностью до множителя может быть оценена как

$$P \sim d_0 E_0 \omega_{res}.$$

В равновесном случае вкачиваемая мощность должна уноситься излучением $P = I$ или

$$d_0 E_0 \omega_{res} = \frac{|\vec{d}_0|^2 \omega_{\text{res}}^4}{\varepsilon_0 c^3},$$

учитывая, что $d_0 = \varepsilon_0 E_{in} R^3$ из пункта B1, получаем ответ:

Ответ:

$$E_{in} = E_0 \left(\frac{c}{\omega_{res} R} \right)^3$$

C1^{0.70} Рассмотрим два груза с массами m_1 и m_2 , соединенные между собой пружиной с жесткостью k . Определите частоту ω_0 малых колебаний в системе.

Классическая задача о приведенной массе.
Пусть смещения грузов относительно положения равновесия равны x_1 и x_2 , соответственно. Запишем уравнения движения:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) \\ m_2 \ddot{x}_2 = +k(x_1 - x_2) \end{cases},$$

поделив первое уравнение на m_1 , а второе на m_2 и вычитая второе из первого, приходим к

$$\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = -\left(\frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2}\right)(x_1 - x_2).$$

Уравнение выше представляет собой уравнение гармонических колебаний с частотой



Ответ:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}}$$

C2^{0.20} Считая малой амплитуду механических колебаний около положения равновесия, напишите явное выражение для $\alpha(x)$ в линейном приближении, если $\alpha(0) = \alpha_0$ и $\left.\frac{d\alpha}{dx}\right|_{x=0} = \beta_0$.

Ответ:

$$\alpha(x) = \alpha_0 + \beta_0 x$$

C3^{0.20} Вычислите дипольный момент двухатомной молекулы во внешнем поле $\vec{E}_0 \cos \omega t$. Ответ представьте в виде:

$$\vec{d} = \sum_i \vec{d}_i \cos \omega_i t$$

$$d = \varepsilon_0(\alpha_0 + \beta_0 x_0 \cos \omega_0 t) E_0 \cos \omega t,$$

что, раскрывая скобки, даст ответ

Ответ:

$$\begin{aligned} d &= \varepsilon_0 \alpha_0 E_0 \cos \omega t + \\ &+ \frac{1}{2} \varepsilon_0 \beta_0 x_0 E_0 \cos(\omega - \omega_0)t + \\ &+ \frac{1}{2} \varepsilon_0 \beta_0 x_0 E_0 \cos(\omega + \omega_0)t \end{aligned}$$

C4^{0.20} Детектор регистрирует дипольное излучение молекулы. Выражению из предыдущего пункта будут соответствовать несколько пиков на частотах ω_i . Высота каждого пика равна интенсивности излучения отдельного диполя $\vec{d}_i$. Для каждого пика определите его частоту и высоту. Выразите ответ через ε_0 , α_0 , β_0 , x_0 , ω , ω_0 и $\vec{E}_0$.

Используя найденное в пункте B4 значение интенсивности излучения, для каждой из частот из пункта C3 получим

Ответ:

Частота	Амплитуда
---------	-----------

$$\omega \frac{\varepsilon_0(\alpha_0 E_0)^2 \omega^4}{c^3}$$

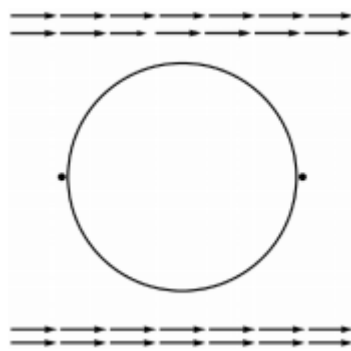
$$\omega - \omega_0 \quad \frac{\varepsilon_0(\beta_0 x_0 E_0)^2 (\omega - \omega_0)^4}{4c^3}$$

$$\omega + \omega_0 \quad \frac{\varepsilon_0(\beta_0 x_0 E_0)^2(\omega + \omega_0)^4}{4c^3}$$

D1^{1,20} В какую точку пространства нужно поместить молекулу исследуемого вещества, чтобы она находилась в электрическом поле максимальной напряженности?

Максимальное поле будет в двух точках, где сонаправлены внешнее поле $\vec{E}_0$ и поле диполя, создаваемое шаром. Это диаметрально противоположные точки шара, причем диаметр выбран коллинеарным полю $\vec{E}_0$.

Ответ:



D2^{0.30} Вычислите фактор усиления $g(\omega)$ электрического поля в этой точке, $g(\omega) = \max_{\vec{r}} \frac{|\vec{E}(\vec{r})|}{|\vec{E}_0|}$. Ответ выразите через диэлектрическую проницаемость металла $\epsilon(\omega)$.

В обозначениях пункта В1 в задании спрашивается отношение E_{out}/E_0 , т.е.

$$\frac{E_{out}}{E_0} = \frac{\varepsilon(\omega)E_{in}}{E_0} = \frac{3\varepsilon(\omega)}{\varepsilon(\omega) + 2}$$

Ответ:

$$g(\omega) = \frac{3\varepsilon(\omega)}{\varepsilon(\omega) + 2}$$

D3^{1,40} Из экспериментальных данных, приведенных на рисунке выше, оцените фактор усиления g электрического поля вследствие плазмонного резонанса (рассмотрите пик при рамановском сдвиге $\omega_0/c = 1000 \text{ см}^{-1}$). Считайте, что условие $\omega_0 \ll \omega$ выполнено.

Снимем величины, которые понадобятся для расчетов, из графика:

$$I_{SERS} = 3 \cdot 10^6 \text{ y. e.}$$

$$I_{Raman} = 0.45 \cdot 10^6 \text{ y. e.}$$

$$N_{SERS} = 1.4 \cdot 10^7$$

$$N_{Raman} = 1.3 \cdot 10^{14}$$

Рассчитаем фактор усиления

$$g = \sqrt[4]{\frac{I_{SERS}/N_{SERS}}{I_{Raman}/N_{Raman}}}$$

Ответ:

$$g \approx 92$$

D4^{0.50}

Пользуясь результатами второй части задачи, оцените размер R металлических частиц, использовавшихся в эксперименте, если длина волны падающего излучения $\lambda = 785$ нм.

Используя ответы пунктов B5 и D2, получаем:

$$\frac{E_{in}}{E_0} = \frac{g(\omega_{res})}{|\varepsilon(\omega_{res})|} = \left(\frac{c}{\omega_{res}R}\right)^3 = \left(\frac{\lambda}{2\pi R}\right)^3,$$

откуда

$$R \sim \frac{\lambda}{2\pi(g/\varepsilon)^{1/3}}.$$

Расчеты произведем для $g = 92, |\varepsilon| = 2, \lambda = 735$ нм и получим

Ответ:

$$R \sim 35 \text{ нм}$$