

A1 2.00

Найдите время движения одного из тел

1. из точки  $O_2$  до точки  $O$ ;
2. из точки  $O_3$  до точки  $P_2$ .

Одно тело проходит точки в следующей последовательности:

$$O_3 \rightarrow O_2 \rightarrow O \rightarrow O_3, \quad P_3 \rightarrow P_2 \rightarrow P \rightarrow P_3$$

За время  $T$  расстояние  $L_{O_2O}$  проходимся тремя телами по одинаковому закону движения, т.е.  $t_{O_2 \rightarrow O} = T/3$ .

Время движения из точки  $O$  до самой себя составляет  $T/2$  в силу зеркальной симметрии траектории и всего движения. Обозначим точкам  $O'_2$  и  $O'_3$  положения 2-го и 3-го в это момент времени.

Тогда  $t_{O \rightarrow O_3} = T/3$ . При этом  $t_{O \rightarrow O_2} = -T/3$ ,  $t_{O_2 \rightarrow O'_2} = T/2$ , поэтому  $t_{O \rightarrow O'_2} = T/6$ . В силу симметрии  $t_{P \rightarrow O} = (t_{O \rightarrow O_3} + t_{O \rightarrow O'_2})/2 = T/4$ .

В итоге  $t_{O \rightarrow O_3} = T/3$ ,  $t_{O \rightarrow P_2} = t_{O \rightarrow P} + t_{P \rightarrow P_2} = -T/4 + 2T/3$ . Значит  $t_{O_3 \rightarrow P_2} = T/3 - T/4 = T/12$ .

A2 1.00

Пусть  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  и  $\vec{v}_3$  - скорости этих трёх тел в некоторый момент времени. Запишите выражение, связывающее эти скорости между собой.

Центр масс покоится, поэтому  $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = 0$

A3 2.00

Докажите, что суммарный момент импульса этой системы равен нулю.

Центр масс системы в силу симметрии относительно отражений не может быть нигде кроме центра, то есть

$$\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 = 0$$

Тогда в момент времени, когда 1-тело находится в точке  $O$ ,  $\vec{r}_2 = -\vec{r}_3$  и

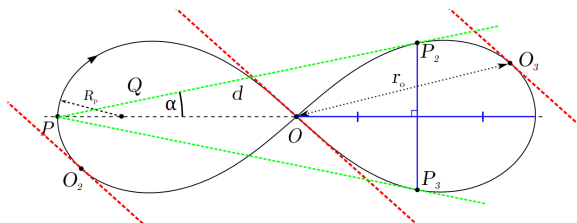
$$\vec{L} = m\vec{r}_2 \times \vec{v}_2 + m\vec{r}_3 \times \vec{v}_3 = m\vec{r}_2 \times (\vec{v}_2 - \vec{v}_3)$$

Из-за симметрии траектории  $\vec{v}_2 = \vec{v}_3 = -\vec{v}_2/2$ , поэтому  $\vec{L} = 0$  когда 1-ое тело находится в точке  $O$ . Помимо этого система замкнутая, поэтому  $\vec{L} = \text{const}$  и в любой момент времени  $\vec{L} = 0$ .

A4 2.00

Постройте положения точек  $O_2$  и  $O_3$  на листе ответов. В листе решений докажите справедливость построения.

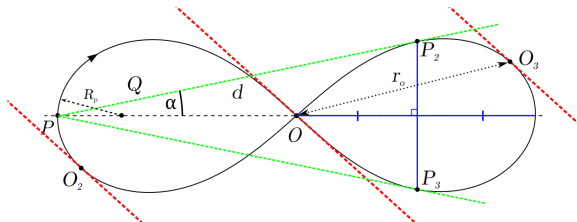
Точки  $O_2$  и  $O_3$  должны быть симметричны друг другу относительно  $O$ . При этом касательная в обеих точках должна быть параллельна направлению движения в точке  $O$ .



A5 2.00

Постройте положения точек  $P_2$  и  $P_3$  на листе ответов. Предложите два независимых метода построения. В листе решений докажите справедливость построений.

С одной стороны центр масс должен быть в точке  $O$ , поэтому  $P_2$  и  $P_3$  можно найти через серединный перпендикуляр  $P'O$ .



С другой стороны вертикальные составляющей скоростей  $v_2$  и  $v_3$  являются половинами от  $v_1$  и дают нулевой вклад в момент импульса. Горизонтальные составляющей скоростей  $v_2$  и  $v_3$  направлены в разные стороны и дают одинаковый вклад в момент импульса. Момент импульса относительно точки  $P$  обнулится, если касательные в точках  $P_2$  и  $P_3$  будут проходить через точку  $P$ .

A6 2.00

Найдите отношение скоростей тел в точках  $O$  и  $P$ .

Из рисунка траектории определим:

- Радиус кривизны в точке  $P$ :  $R_p = 41.7$ ;
- Расстояние  $OO_3$ :  $r_0 = 145.2$

- Расстояние  $PP_2$ :  $d = 242$
- Угол между  $PO$  и  $PP_2$ :  $\alpha = 11.6^\circ$

Когда 1-ое тело находится в точке  $O$  полная энергия системы:

$$E = \frac{mv_{1,o}^2}{2} + \frac{mv_{2,o}^2}{2} + \frac{mv_{3,o}^2}{2} - \frac{Gm^2}{r_{12,o}} - \frac{Gm^2}{r_{23,o}} - \frac{Gm^2}{r_{13,o}}$$

При этом  $v_{1,o} = 2v_{2,o} = 2v_{3,o} = v_o$  и  $r_{12,o} = r_{13,o} = \frac{1}{2}r_{12,o} = r_o$ . То есть

$$E = \frac{3mv_o^2}{4} - \frac{5Gm^2}{2r_o}$$

Когда 1-ое находится в точке  $P$  полная энергия системы находится аналогичным образом. При этом  $r_{12,p} = r_{13,p} = d$ ,  $r_{23,p} = 2d \sin \alpha$ . При этом  $y$ -проекция уравнения  $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = 0$  позволяет написать  $v_p = v_{1,p} = 2v_{2,p} \sin \alpha = 2v_{3,p} \sin \alpha$ . Подстановка дает

$$E = \frac{mv_p^2}{2} \left(1 + \frac{1}{2 \sin^2 \alpha}\right) - \frac{Gm^2}{d} \left(2 + \frac{1}{2 \sin \alpha}\right) = 6.68mv_p^2 - 4.49 \frac{Gm^2}{d}$$

Когда 1-ое тело находится в точке  $P$  для него можно записать II закон Ньютона:

$$\frac{mv_p^2}{R_p} = 2 \frac{Gm^2}{d^2} \cos \alpha$$

Полученную систему уравнений можно решить и получить результат

$$\frac{v_o}{v_p} = \sqrt{\frac{4}{3} \left(6.68 + 0.510 \frac{d^2}{R_p} \left[\frac{5}{2r_o} - \frac{4.49}{d}\right]\right)} = 2.8$$