



Для разделения материалов различных магнитных свойств используется метод магнитного разделения. Например, месторождения титановых руд содержат такие минералы, как циркон (ZrSiO_4), монацит ($[\text{Ce,La,Th}] \text{PO}_4$), ильменит (FeTiO_3), рутил (TiO_2), среди которых экономическое значение титансодержащих минералов сложно переоценить. Рутил и ильменит используются в производстве нетоксичных пигментов, применяемых в чернилах, пластиках, керамике и многом другом. Поэтому, рутил и ильменит должны быть отделены из титановых руд. Магнитное разделение использует магнитные силы для разделения магнитных материалов.

Принцип работы магнитного сепаратора показан на рис. 1.

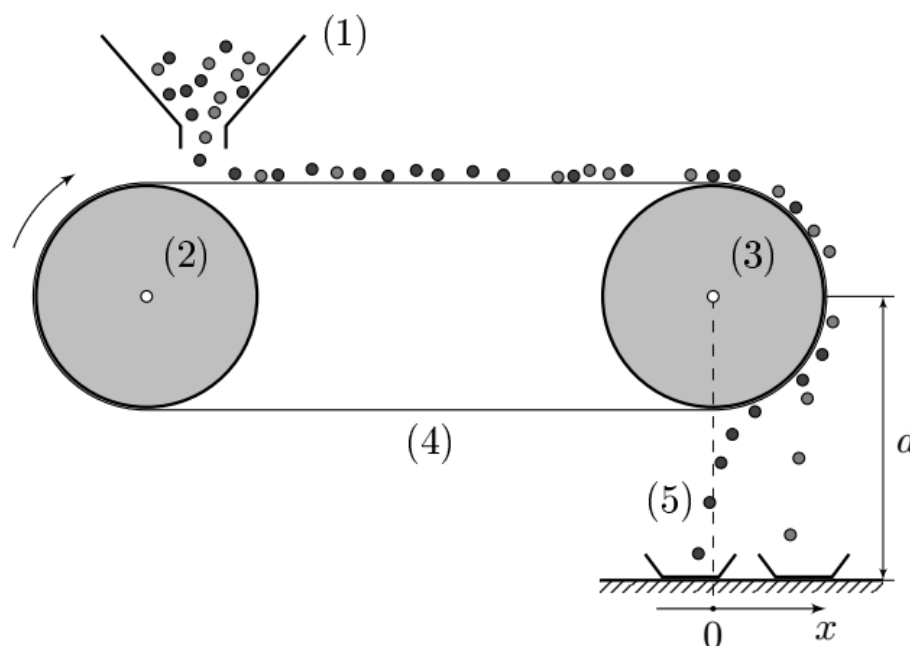


Рис. 1: (1) ящик; (2) немагнитный ролик L_1 ; (3) магнитный ролик L_2 ; (4) конвейерная лента; (5) магнитные частицы; (6) сборные лотки.

Основная часть магнитного сепаратора состоит из двух роликов L_1 и L_2 (диаметр D), соединённых с помощью конвейерной ленты (рис. 1). Толщиной ленты по сравнению с радиусом роликов можно пренебречь. Ролик L_1 немагнитный. Ролик L_2 является магнитным, и магнитное поле вокруг меняется по следующему закону

$$B(r) = |\vec{B}| = B_0 e^{-r/a}$$

где r – расстояние от поверхности ролика в радиальном направлении, a – некоторая константа. Магнитный ролик вращается с угловой скоростью ω , которая поддерживается электромотор. Частицы минералов поступают из ящика на ленту конвейера, а по ней – к магнитному ролику. Трение между лентой и магнитным роликом достаточно велико, чтобы предотвратить проскальзывание между ними

Следующие математические формулы могут быть полезны:

$$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \begin{cases} 1 + e^{-2x} & \text{для } x \rightarrow \infty \\ \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} & \text{для } x \rightarrow 0 \end{cases},$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

В данной части мы обсудим модель этого магнитного сепаратора, учитывая только магнитные и гравитационные силы.

Часть А. Магнитная восприимчивость материалов

Изучим свойства парамагнитных материалов.

Рассмотрим минерал, состоящий из магнитных атомов X концентрацией n , каждый атом обладает магнитным моментом p . Концентрация мала, поэтому можно пренебречь взаимодействием магнитных моментов атомов друг с другом. В отсутствии внешнего магнитного поля магнитные моменты атомов направлены случайным образом, в результате намагниченность $\vec{M}$ равна нулю. Намагниченность вещества – магнитный момент единицы объёма вещества. Во внешнем магнитном поле атомы упорядочиваются вдоль направления внешнего магнитного поля $\vec{B}$, у материала появляется магнитный момент, получается ненулевая намагниченность.

Согласно квантовой механике, проекция магнитного момента атома на направление поля (выберем ось z вдоль него) равна:

$$p_z = g_j \mu_B m$$

где m – число, принимает значения из множества $\{j, j-1, j-2, \dots, -j\}$ где j – неотрицательное целое или полуцелое число, характеризующее атом X , $\mu_B = 0,93 \cdot 10^{-23} \text{ А} \cdot \text{м}^2$ – магнетон Бора, и g_j – так называемый фактор Ланде. Вероятность $W(p_z)$ проекции магнитного момента на направление магнитного поля принять значение p_z равна

$$W(p_z) = A e^{-\frac{U_B}{kT}}$$

где A – нормировочная константа, U_B – энергия магнитного момента в магнитном поле, T – температура, k – постоянная Больцмана. Можно показать, что средние значения проекции магнитного момента на оси x и y равны нулю.

A1 1.10 Найдите среднее значение $\langle p_z \rangle$ компоненты магнитного момента атома X на ось z , находящегося в магнитном поле $\vec{B}$ при температуре T , как функцию параметра $\alpha = \frac{g_j \mu_B B}{kT}$.

A2 1.10 Укажите выражение для $\langle p_z \rangle$ в предельном случае $\alpha \rightarrow 0$ (то есть для случаев, когда магнитная энергия намного меньше тепловой энергии). Рассмотрите так же случай $\alpha \rightarrow \infty$. Приведите схематический график зависимости $\langle p_z \rangle$ от параметра α .

Магнитная восприимчивость χ характеризует магнитные свойства вещества. В слабом магнитном поле $\vec{B}$ восприимчивость определяется как $\chi = \frac{\mu_0 M}{B}$, где M намагниченность, μ_0 – магнитная проницаемость вакуума. Считайте магнитное поле слабым, то есть параметр $\alpha \ll 1$.

A3^{0.90} Вычислите магнитную восприимчивость χ . Ответ выразите через концентрацию атомов n , температуру T , фактор Ланде g_j , параметр j , и фундаментальные константы.

Часть В. Магнитный сепаратор

Давайте рассмотрим описанную выше модель магнитных сепараторов. Зависимость индукции магнитного поля B в точке от расстояния r от этой точки до поверхности магнитного ролика вдоль радиального направления представлена в таблице:

r , мм	B , Тл	r , мм	B , Тл	r , мм	B , Тл
1	0.606	5	0.098	9	0.024
2	0.415	6	0.070	10	0.014
3	0.262	7	0.045	11	0.008
4	0.144	8	0.030	12	0

B1^{0.80} Используя данные в таблице, определите численные значения параметров B_0 и a из уравнения (1). Запишите формулы, по которым вы их определили.

Здесь и далее для расчётов используйте следующие численные значения параметров задачи:

$D = 0.04$ м	$R_0 = 0.5 \cdot 10^{-3}$ м	$a = 3.0 \cdot 10^{-3}$ м	$B_0 = 1.0$ Тл
$d = 1.0$ м	$\omega_0 = 2\pi \cdot 240$ мин ⁻¹	$\rho_1 = 5.0 \cdot 10^3$ кг/м ³	$\rho_2 = 4.3 \cdot 10^3$ кг/м ³
$\chi_1 = 6.3 \cdot 10^{-4}$	$\chi_2 = 6.5 \cdot 10^{-5}$	$\Delta = 0.2$ м	

Рассмотрим частицы из одного парамагнитного минерала со средней магнитной восприимчивостью χ_1 и плотностью ρ_1 . Считайте частицы сферическими. Также считайте, что магнитные моменты частиц, помещённых в магнитное поле ролика, находятся в их центре. Радиус частиц – R_0 . Сборный лоток располагается под магнитным роликом на расстоянии d от него (рис. 1). Угловая скорость ролика равна ω_0 . Взаимодействием между магнитными моментами частиц можно пренебречь. Магнитной силой, действующей на частицы, которые покинули ролик, также можно пренебречь. Когда индукция магнитного поля меняется на малую величину dB изменение энергии частицы записывается как $dE = -\vec{P} \cdot d\vec{B}$, где $\vec{P}$ – магнитный момент частицы.

B2^{0.80} Чему равна энергия частицы в поле $\vec{B}$? Выразите ответ через индукцию магнитного поля B , магнитную восприимчивость материала частицы χ_1 и её объём V .

B3^{1.10} Найдите выражение для положения лотка x , в котором он собирает минеральные частицы. Найдите численное значение для x .

Предположим, что минеральные частицы являются сферами разных радиусов. Относительное отклонение радиуса от среднего не превышает 10%, то есть $\left| \frac{R_0 - R}{R_0} \right| \leq 0.1$, где R и R_0 – радиус конкретной частицы и средний радиус всех частиц соответственно. Угловая скорость ролика ω_0 .

B4^{1.10} Найдите выражение и численное значение для ширины пучка частиц Δ_0 в направлении оси x около лотка.

Смесь из частиц состоящих из двух разных минералов с магнитными проницаемостями χ_1 и χ_2 и плотностями ρ_1 и ρ_2 соответственно. Считайте средние радиусы частиц двух разных минералов равными R_0 .

B5^{1.10} Найдите выражение для угловой скорости магнитного ролика ω , при которой можно отдельно получить частицы двух типов. Найдите численное значение ω . Считайте известной ширину обоих лотков Δ .