



## Часть А. Фазовая и групповая скорость

Колебания и волны - один из самых интересных и распространенных разделов физики.

Волновые процессы встречаются во всех областях и в механике, и в термодинамике, и в электродинамике, а оптика целиком является наукой о волнах. В этой задаче мы рассмотрим знакомые всем корабельные волны, обладающие некоторыми очень интересными и неочевидными особенностями.

Однако, сначала рассмотрим общие свойства волн. Простейшим типом волн, распространяющихся в линейной среде, являются плоские монохроматические волны - то есть волны с конкретной частотой и длиной волны. Зависимость их амплитуды от времени и координаты (пока рассматриваем одномерный случай) описывается следующим образом:

$$A(t, x) = A_0 \cos \theta = A_0 \cos(kx - \omega t + \varphi_0)$$

A1 1.00

Найдите скорость распространения постоянной фазы монохроматической волны (фазовая скорость).

Однако, в реальности чистые монохроматические волны никогда не существуют. На самом деле волны распространяются в волновых пакетах – суперпозицией многих волн близких частот. Волновой пакет в отличие от монохроматической волны локализован в некоторой области пространства и распространяется не с фазовой, а с так называемой групповой скоростью. Групповая скорость обычно интерпретируется как скорость перемещения максимума амплитудной огибающей квазимонохроматического волнового пакета. Для примера, рассмотрим волновой пакет из двух близких по частоте и волновому вектору монохроматических волн:

$$A(t, x) = A_0 \cos(k_1 x - \omega_1 t - \varphi_1) + A_0 \cos(k_2 x - \omega_2 t - \varphi_2)$$

A2 1.00

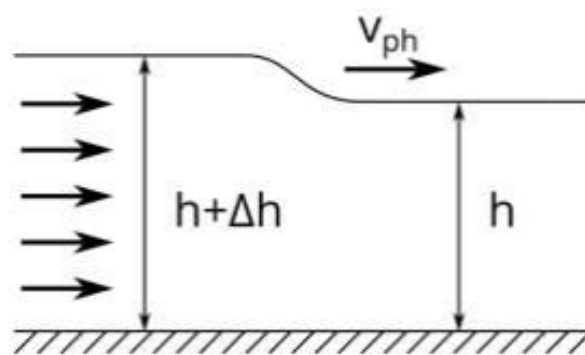
Предполагая, что существует некоторая функциональная зависимость  $\omega(k)$ , найдите групповую скорость через эту функцию в точке  $k \approx k_1 \approx k_2$ .

Вышеупомянутая функция  $\omega(k)$  называется дисперсионным соотношением для волн определенного типа и именно она полностью определяет их поведение. Именно поэтому исследование любых линейных волн начинается с нахождения этой зависимости.

## Часть В. Дисперсионное соотношение для волн на воде

Распространение волн на воде определяется двумя физическими эффектами: поверхностным натяжением и гравитационным полем земли. Первый эффект вызывает так называемые капиллярные волны с маленькой длиной волны, который мы рассматривать не будем. Гравитация же приводит к существованию так называемых гравитационных волн.

Итак, рассмотрим волну, распространяющуюся как на рисунке. Считайте, что в невозмущенной области вода стоячая, а в возмущенной вся вода движется с некоторой скоростью.



B1 1.00

Найдите скорость распространения волны  $v_{ph}$ , если глубина воды  $h$ .

Если глубина воды много больше длины волны  $\lambda$ , то эффективно вода движется только в слое толщиной  $\lambda/2\pi$ .

B2 1.00

Найдите скорость распространения волны на глубокой воде. Найденная скорость является фазовой скоростью волны.

Теперь, зная фазовую скорость волны в зависимости от длины волны, мы можем легко найти дисперсионное соотношение  $\omega(k)$ , а из него, с помощью результата B2, и групповую скорость волн.

B3 1.00

Найдите дисперсионное соотношение и групповую скорость волн на мелкой воде  $v_g(k)$ .

B4 1.00

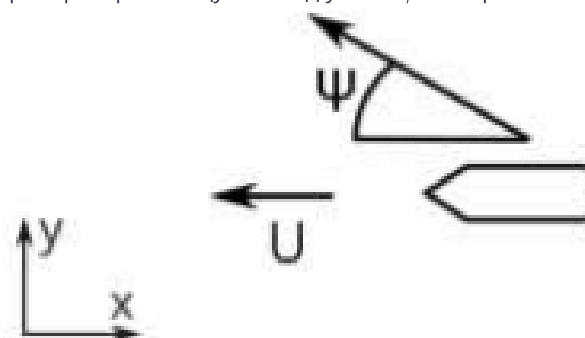
Найдите дисперсионное соотношение и групповую скорость волн на глубокой воде  $v_g(k)$ .

## Часть С. Угол расхождения корабельных волн

Легко заметить, что для волн на глубокой воде соблюдается замечательное соотношение  $v_g = v_{ph}/2$  для волн с любой длиной волны. Это приводит к интересным эффектам. Рассмотрим обычные корабельные волны, которые каждый мог наблюдать. Известно, что они образуют конус по границам которого бегут волны. Для излучателей, движущихся со скоростью выше скорости распространения волн в среде с линейной дисперсией, широко известен эффект образования маховского конуса с углом раствора  $\arcsin(c/v)$ .

Однако, при нелинейном законе дисперсии нахождение угла становится сложнее, его величина определяется конструктивной интерференцией монохроматических волн.

Итак, рассмотрим плоскую монохроматическую волну, распространяющуюся под углом  $\psi$  к скорости источника. Вода стоячая.



C1 1.00

Найдите соотношение между фазовой скоростью и скоростью источника, если он должен оставаться в точке постоянной фазы волны.

Представьте, что в некоторый момент времени источник излучил широкий спектр волн. Рассмотрим цуг с узким спектром, такой, что его фазовая скорость соответствует распространению под углом  $\psi$ .

**C2** <sup>1.00</sup> Найдите точку в которой будет находиться цуг через время  $dt$ .

**СЗ** <sup>1.00</sup> Найдите геометрическое место точек для цугов, испущенных под всевозможными углами.

Теперь представьте, что такие «элементарные волны» из пункта СЗ испускаются в каждый момент времени.

**C4**<sup>1.00</sup> Найдите угол раствора конуса, который ограничивает все распространяющиеся волны

T

Механика

## Волны

2019

Сборы ХУ

Y

## Распространение волн

 Website in English

2020 — Мы те, кого должны превзойти.