

A1 ^{0.70} Выразите предел разрешения $\Delta_0 = AB$ через λ (длина волны света в вакууме), D , n , n' и $\sin u$ (угол u отмечен на рис. 2). При выводе пользуйтесь параксиальным приближением.

Из-за укорочения длины волны в веществе

$$D = 1.22 \sin \phi \frac{\lambda}{n'},$$

при этом рассмотрение преломления луча, проходящего через центр линзы дает уравнение

$$\frac{AB}{x} = \frac{A'B'}{x'} n'.$$

В итоге

$$\Delta_0 = AB = \frac{xn'}{x'n} A'B' = 1.22 \frac{\lambda x}{nD} = \frac{0.61\lambda}{n \sin u}$$

Ответ:

$$\Delta_0 = \frac{0.61\lambda}{n \sin u}$$

A2 ^{0.30} Изначально система находится в вакууме $n = n' = 1$. Экспериментатор может наполнить пространство слева или справа от линзы (рис. 2) маслом. Куда нужно добавить масло, чтобы улучшить разрешение?
а) со стороны образца; б) со стороны изображения

На предел разрешения влияет n со стороны образца, поэтому правильный ответ а)

Ответ: а) со стороны образца

B1 ^{0.50} Пусть на ансамбль из $N_0 \gg 1$, первоначально находящихся в состоянии S , начинает падать излучение с интенсивностью I_1 и длиной волны λ_1 . Сколько в среднем молекул N^* будет находиться в состоянии S^* , когда система достигнет динамического равновесия?

Приравняем вероятности переходов:

$$(N_0 - N^*)\sigma_1 I_1 = \frac{N^*}{\tau_{fl}},$$

тогда

$$N^* = N_0 \frac{\sigma_1 I_1}{\frac{1}{\tau_{fl}} + \sigma_1 I_1}$$

Ответ:

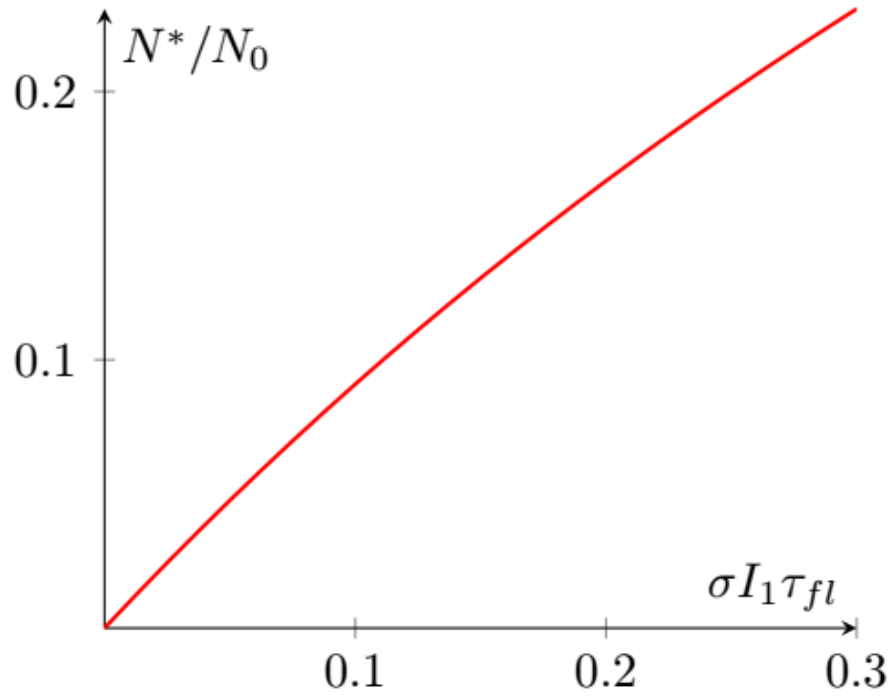
$$N^* = N_0 \frac{\sigma_1 I_1}{\frac{1}{\tau_{fl}} + \sigma_1 I_1}$$

B2 ^{0.50} Постройте график зависимости $N^*(I_1)$, получившейся в пункте B1, и получите приближение при малых I_1 .

В приближении малых I_1

$$N^* \simeq N_0 \tau_{fl} \sigma I_1$$

Ответ:



B3 0.50 При каком радиусе пластинки r_0 минимум интенсивности λ_3 на образце равен нулю?

Если пренебрегать дифракцией на краях линзы волны после нее синфазно сходятся в точке фокуса, поэтому если площадь пластинки πr_0^2 будет составлять половину от площади линзы $\pi D^2/4$, то амплитуда волн с фазой отличающихся на π совпадает и интенсивность в фокусе окажется равной нулю.

Ответ:

$$r_0 = \frac{D}{2\sqrt{2}}$$

B4 0.50 Преобразуйте формулу выше, используя приближение $y \ll \Delta_0$.

Ответ:

$$I_3(y) \simeq I_{3,\max} \cdot \frac{\pi^2 y^2}{4\Delta_0^2}$$

B5 1.00 Пусть образец облучается одновременно двумя лазерами I_1 (распределение интенсивности (1)), и I_3 (распределение интенсивности из пункта B4).

Доля N^*/N_0 молекул, находящихся в состоянии S^* , может быть записана как

$$\frac{N^*}{N_0} = A \exp\left(-\frac{y^2}{\Delta_{\text{cwSTED}}^2}\right)$$

На практике мощность $I_{3,\max}$ велика, и $\sigma_3 I_{3,\max} \gg \sigma_1 I_1(0)$. Найдите параметры A и Δ_{cwSTED} .

Примечание: Используйте приближение $\frac{1}{1+x} \approx 1-x \approx e^{-x}, x \ll 1$.

Условие равновесия:

$$\sigma_1 I_1 N^* = (N_0 - N^*)(\sigma_3 I_3 + \tau_{fl}^{-1}).$$

Подстановка вида зависимости от y приводит к результату:

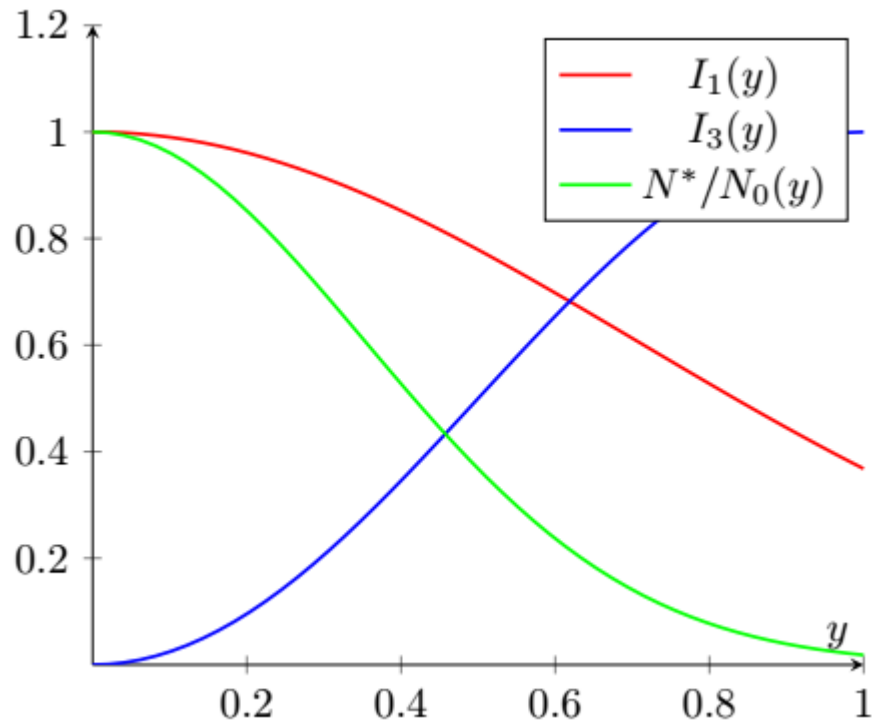
$$N^* = N_0 \frac{\sigma_1 I_1(0) e^{-y^2/\Delta_0^2}}{\sigma_1 I_1(0) e^{-y^2/\Delta_0^2} + \sigma_3 I_{3,\max} \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi y}{\Delta_0}\right) + \tau_{fl}^{-1}} \simeq N_0 \tau_{fl} \sigma_1 I_1(0) e^{-\frac{y^2}{\Delta_0^2} \left(1 + \frac{\pi^2}{4} \tau_{fl} \sigma_3 I_{3,\max}\right)}$$

Ответ:

$$A = \tau_{fl} \sigma_1 I_1(0)$$

$$\Delta_{\text{cwSTED}} = \frac{\Delta_0}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4} \tau_{fl} \sigma_3 I_{3,\max}}}$$

В6 0.50 Нарисуйте на одном графике качественные зависимости $I_1(y)$, $I_3(y)$ и $N^*(y)/N_0$.



В7 0.50 Определите, при каком $I_{3,\max}$ достигается десятикратный выигрыш в разрешении, т.е. $\Delta_{\text{cwSTED}} = \Delta_0/10$.

Ответ:

$$I_{3,\max} = \frac{396}{\pi^2 \tau_{fl} \sigma_3}$$

В8 1.00 Пусть теперь образец облучается в течение времени $\tau_1 \ll \tau_{fl}$ лазером I_1 (распределение интенсивности (1)), а после этого в течение времени τ_3 лазером I_3 (распределение интенсивности из пункта В4). Доля N^*/N_0 молекул, находящихся в состоянии S^* , может быть записана как

$$\frac{N^*}{N_0} = A \exp\left(-\frac{y^2}{\Delta_{\text{pgtSTED}}^2}\right)$$

На практике мощность $I_{3,\max}$ велика, и $\sigma_3 I_{3,\max} \gg \sigma_1 I_1(0)$. Найдите параметры A и Δ_{pgtSTED} .

После включения импульса λ_1 количество молекул в возбужденном состоянии равно $N_1(y) = N_0 \sigma_1 \tau_1 I_1(y)$. После включения импульса λ_3 их количество уменьшится до

$$N^*(y) = N_1(y) e^{-\sigma_3 I_3(y) \tau_3}.$$

Подстановка приводит к результату

$$N^*(y) = N_0 \sigma_1 \tau_1 I_1(0) e^{-\frac{y^2}{\Delta_0^2} \left[1 + \frac{\pi^2}{4} \sigma_3 \tau_3 I_{3,\max}\right]}$$

Ответ:

$$A = \tau_1 \sigma_1 I_1(0)$$

$$\Delta_{\text{pgtSTED}} = \frac{\Delta_0}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4} \tau_3 \sigma_3 I_{3,\max}}}$$

В9 2.00 Доля N^*/N_0 молекул, находящихся в состоянии S^* , может быть записана как

$$\frac{N^*}{N_0} = A \exp\left(-\frac{y^2}{\Delta_{\text{GSD}}^2}\right).$$

Найдите параметры A и Δ_{GSD} .

Время $\tau_{ISC} \gg \tau_{fl}, 1/(\sigma_1 I_1)$ поэтому можно считать, что переход $S^* \rightarrow T$ является «возмущением» равновесного состояния S и S^* . В каждый момент времени равновесие между количеством молекул N в состоянии S и количеством молекул N^* в состоянии S^* задается соотношением

$$\frac{N^*}{\tau_{fl}} = N\sigma_1 I_1' \quad \Rightarrow \quad N^* = (N + N^*) \frac{\tau_{fl}\sigma_1 I_1'}{\tau_{fl}\sigma_1 I_1' + 1}$$

при этом общее количество молекул в состояниях S и S^* меняется только из-за перехода $S^* \rightarrow T$, т.е. $(N + N^*) = -\frac{N^*}{\tau_{ISC}}$. После освещения светом $I_1'(y)$ в течении τ_1' мы имеем

$$N^*(y, \tau_1') + N(y, \tau_1') = N_0 e^{-\frac{\tau_1'}{\tau_{ISC}} \frac{\tau_{fl}\sigma_1 I_1'(y)}{\tau_{fl}\sigma_1 I_1'(y)+1}} \simeq N_0 e^{-\frac{\tau_1'}{\tau_{ISC}} \tau_{fl}\sigma_1 I_{1,\max}' \frac{\pi^2}{4\Delta_0^2} y^2}$$

Во время освещения светом $I_1(y)$ в течении времени τ_1 будет происходить ровно такой же процесс и

$$\begin{aligned} N^*(y) &= N_0 \frac{\tau_{fl}\sigma_1 I_1(y)}{\tau_{fl}\sigma_1 I_1(y) + 1} e^{-\frac{\tau_1'}{\tau_{ISC}} \tau_{fl}\sigma_1 I_{1,\max}' \frac{\pi^2}{4\Delta_0^2} y^2} e^{-\frac{\tau_1}{\tau_{ISC}} \frac{\tau_{fl}\sigma_1 I_1(y)}{\tau_{fl}\sigma_1 I_1(y)+1}} \simeq \\ &\simeq N_0 \tau_{fl}\sigma_1 I_1(0) e^{-\frac{y^2}{\Delta_0^2}} e^{-\frac{\tau_1'}{\tau_{ISC}} \tau_{fl}\sigma_1 I_{1,\max}' \frac{\pi^2}{4\Delta_0^2} y^2} e^{-\frac{\tau_1}{\tau_{ISC}} \tau_{fl}\sigma_1 I_1(0)} \end{aligned}$$

Ответ:

$$A = \tau_{fl}\sigma_1 I_1(0) e^{-\frac{\tau_1}{\tau_{ISC}} \tau_{fl}\sigma_1 I_1(0)}$$

$$\Delta_{GSD} = \frac{\Delta_0}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2 \tau_1' \tau_{fl}}{4 \tau_{ISC}} \sigma_1 I_{1,\max}'}}$$

С1^{2.00}

Пусть интенсивности сигналов, собранных каждым из объективов, равны I_0 . Найдите интенсивности пучков, получаемых в результате интерференции на детекторах 1, 2, 3 и 4.

Рассмотрим комплексную амплитуду поля в разных точках по отношению к амплитуде поля после каждого из объективов.

	Приходит сверху	Приходит снизу	Уходит вверх	Уходит вниз
Левая призма	$e^{ikz+i\varphi_a}$	e^{-ikz}	$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{ikz+i\varphi_a+i\pi/2} + e^{-ikz}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{ikz+i\varphi_a} + e^{-ikz+i\pi/2}\right)$
Верхняя призма	-	$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{ikz+i\varphi_a+i\pi/2} + e^{-ikz}\right)$	$E_2 = \frac{1}{2}\left(e^{ikz+i\varphi_a+i\pi/2} + e^{-ikz}\right)$	$\frac{1}{2}\left(e^{ikz+i\varphi_a+i\pi/2} + e^{-ikz}\right)e^{i\pi/2}$
Нижняя призма	$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{ikz+i\varphi_a} + e^{-ikz+i\pi/2}\right)$	-	$\frac{1}{2}\left(e^{ikz+i\varphi_a} + e^{-ikz+i\pi/2}\right)e^{i\pi/2}$	$E_4 = \frac{1}{2}\left(e^{ikz+i\varphi_a} + e^{-ikz+i\pi/2}\right)$
Правая призма	$\frac{1}{2}\left(e^{ikz+i\varphi_a+i\pi/2} + e^{-ikz}\right)e^{i\pi/2}e^{i\varphi_b}$	$\frac{1}{2}\left(e^{ikz+i\varphi_a} + e^{-ikz+i\pi/2}\right)e^{i\pi/2}$	E_1	E_3

Непосредственно из таблицы

$$E_2 = \frac{1}{2}\left(e^{ikz+i\varphi_a+i\pi/2} + e^{-ikz}\right) = \cos kz$$

$$I_2/I_0 = |E_2|^2 = \cos^2 kz = \frac{1}{2}(1 + \cos 2kz)$$

и

$$E_4 = \frac{1}{2}\left(e^{ikz+i\varphi_a} + e^{-ikz+i\pi/2}\right) = \sin kz$$

$$I_4/I_0 = |E_4|^2 = \sin^2 kz = \frac{1}{2}(1 - \cos 2kz) .$$

Складывая с учетом фазы поле волн, приходящих сверху и снизу на правую призму, получим

$$E_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(e^{ikz+i\varphi_a+i\pi/2} + e^{-ikz}\right)e^{i\pi/2}e^{i\varphi_b}e^{i\pi/2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(e^{ikz+i\varphi_a} + e^{-ikz+i\pi/2}\right)e^{i\pi/2} = \frac{i}{\sqrt{2}}(\cos kz + \sin kz)$$

$$I_1/I_0 = |E_1|^2 = \frac{1}{2}(1 + \sin 2kz)$$

и

$$E_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(e^{ikz+i\varphi_a+i\pi/2} + e^{-ikz}\right)e^{i\pi/2}e^{i\varphi_b} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(e^{ikz+i\varphi_a} + e^{-ikz+i\pi/2}\right)e^{i\pi/2}e^{i\pi/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos kz - \sin kz)$$

$$I_3/I_0 = |E_3|^2 = \frac{1}{2}(1 - \sin 2kz)$$

Ответ:

$$I_1 = \frac{I_0}{2} \left(1 + \sin \frac{4\pi z}{\lambda} \right)$$

$$I_2 = \frac{I_0}{2} \left(1 + \cos \frac{4\pi z}{\lambda} \right)$$

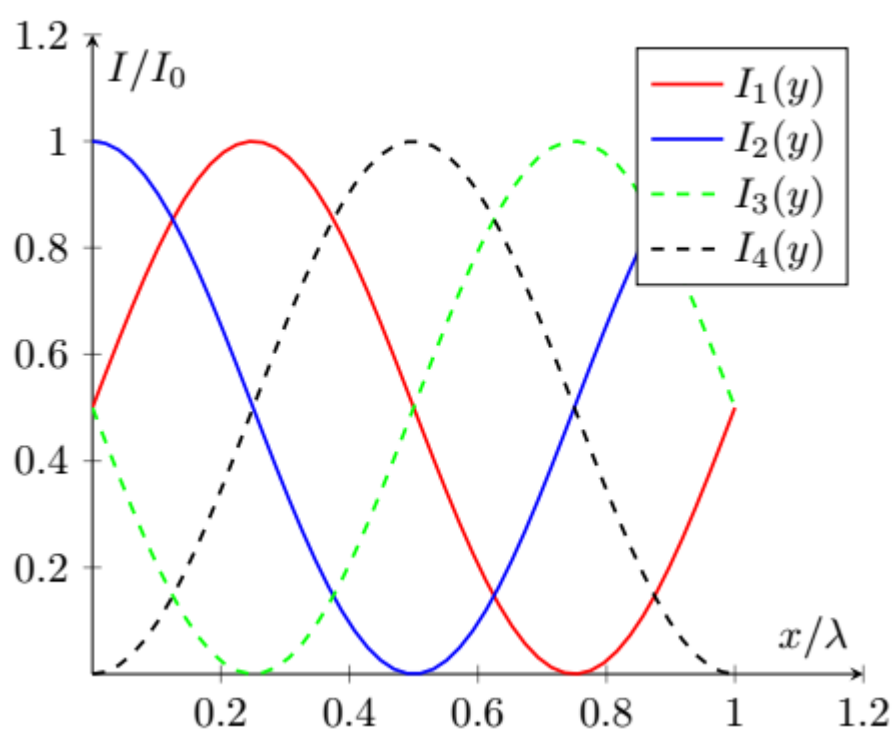
$$I_3 = \frac{I_0}{2} \left(1 - \sin \frac{4\pi z}{\lambda} \right)$$

$$I_4 = \frac{I_0}{2} \left(1 - \cos \frac{4\pi z}{\lambda} \right)$$

C2^{0.50}

Нарисуйте графики найденных в C1 зависимостей.

Ответ:



C3^{0.50}

Выразите z через отношения I_1/I_3 и I_2/I_4 , укажите, при каком сдвиге $z \rightarrow z + \Delta z$ эти отношения остаются неизменными?

$$\frac{I_1}{I_3} = \frac{1 + \sin \frac{4\pi z}{\lambda}}{1 - \sin \frac{4\pi z}{\lambda}}, \quad \frac{I_2}{I_4} = \frac{1 + \cos \frac{4\pi z}{\lambda}}{1 - \cos \frac{4\pi z}{\lambda}}$$

Ответ: При сдвиге на $\Delta z = \lambda/2$ отношения остаются неизменными.