

A1 1.10 Найдите среднее значение $\langle p_z \rangle$ компоненты магнитного момента атома X на ось z , находящегося в магнитном поле $\vec{B}$ при температуре T , как функцию параметра $\alpha = \frac{g_j \mu_B B}{kT}$.

Энергия магнитного диполя $\vec{p}$ в магнитном поле $\vec{B}$ равна $-\vec{p} \cdot \vec{B}$ поэтому $U_B = -p_z B$.

Вероятность того, что m конкретного атома принимает хоть какое-то значение должна быть равна 1, поэтому

$$\sum_{m=-j}^j A e^{\frac{g_j \mu_B B}{kT} m} = A \sum_{m=-j}^j e^{\alpha m} = A e^{-\alpha j} \frac{e^{(2j+1)\alpha} - 1}{e^{\alpha} - 1} = A \frac{\sinh\left(j + \frac{1}{2}\right)\alpha}{\sinh \frac{\alpha}{2}} = 1.$$

Среднее значение $\langle p_z \rangle$ найдем по определению:

$$\langle p_z \rangle = \sum p_z W(p_z) = A g_j \mu_B \sum_{m=-j}^j m e^{\alpha m}.$$

Сумму $\sum_{m=-j}^j m e^{\alpha m}$ можно найти, как

$$\sum_{m=-j}^j m e^{\alpha m} = \frac{d}{d\alpha} \left(\sum_{m=-j}^j e^{\alpha m} \right) = \frac{\left(j + \frac{1}{2}\right) \cosh\left[\left(j + \frac{1}{2}\right)\alpha\right] \sinh \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \sinh\left[\left(j + \frac{1}{2}\right)\alpha\right]}{\sinh^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Итого

$$\langle p_z \rangle = g_j \mu_B \left(\left(j + \frac{1}{2}\right) \coth\left[\left(j + \frac{1}{2}\right)\alpha\right] - \frac{1}{2} \coth \frac{\alpha}{2} \right)$$

Ответ:

$$\langle p_z \rangle = g_j \mu_B \left(\left(j + \frac{1}{2}\right) \coth\left[\left(j + \frac{1}{2}\right)\alpha\right] - \frac{1}{2} \coth \frac{\alpha}{2} \right)$$

A2 1.10 Укажите выражение для $\langle p_z \rangle$ в предельном случае $\alpha \rightarrow 0$ (то есть для случаев, когда магнитная энергия намного меньше тепловой энергии). Рассмотрите так же случай $\alpha \rightarrow \infty$. Приведите схематический график зависимости $\langle p_z \rangle$ от параметра α .

Для $\alpha \rightarrow 0$ воспользуемся формулой $\coth x \simeq 1/x + x/3$ и получим

$$\left(j + \frac{1}{2}\right) \coth\left[\left(j + \frac{1}{2}\right)\alpha\right] - \frac{1}{2} \coth \frac{\alpha}{2} \simeq \frac{\alpha}{3} j(j+1)$$

то есть при $\alpha \rightarrow 0$

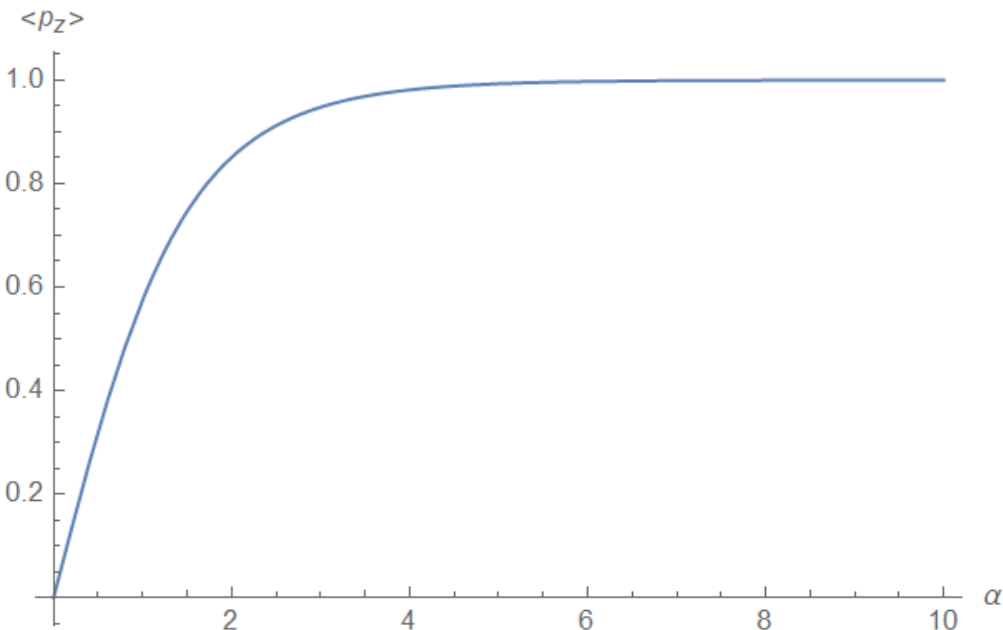
$$\langle p_z \rangle \simeq \frac{j(j+1)}{3} \alpha g_j \mu_B.$$

Для $\alpha \rightarrow \infty$ воспользуемся формулой $\coth x \simeq 1 + e^{-2x}$ и получим (при $j \neq 0$)

$$\left(j + \frac{1}{2}\right) \coth\left[\left(j + \frac{1}{2}\right)\alpha\right] - \frac{1}{2} \coth \frac{\alpha}{2} \simeq j - \frac{1}{2} e^{-\alpha}$$

то есть при $\alpha \rightarrow \infty$

$$\langle p_z \rangle \simeq g_j \mu_B \left(j - \frac{1}{2} e^{-\alpha} \right).$$



Ответ:

$$\langle p_z \rangle \simeq \begin{cases} \frac{j(j+1)}{3} \alpha g_j \mu_B, & \alpha \rightarrow 0 \\ j g_j \mu_B, & \alpha \rightarrow \infty \end{cases}$$

A3 ^{0.90} Вычислите магнитную восприимчивость χ . Ответ выразите через концентрацию атомов n , температуру T , фактор Ланде g_j , параметр j , и фундаментальные константы.

По определению M - объемная намагниченность, то есть $M = n \langle p_z \rangle$. Таким образом

$$\chi \simeq \frac{j(j+1)}{3} \frac{n \mu_0 g_j^2 \mu_B^2}{kT}$$

Ответ:

$$\chi \simeq \frac{j(j+1)}{3} \frac{n \mu_0 g_j^2 \mu_B^2}{kT}$$

B1 ^{0.80} Используя данные в таблице, определите численные значения параметров B_0 и a из уравнения (1). Запишите формулы, по которым вы их определили.

Зависимость $\ln(B/\text{Тл})$ от r должна быть линейной:

$$\ln \frac{B}{\text{Тл}} = \ln \frac{B_0}{\text{Тл}} - \frac{r}{a}.$$

Пересчет точек и нахождение коэффициентов с помощью МНК приводит к таким результатам:

$$B_0 = 1.0 \text{ Тл}, \quad a = 2.25 \text{ мм}$$

B2 ^{0.80} Чему равна энергия частицы в поле $\vec{B}$? Выразите ответ через индукцию магнитного поля B , магнитную восприимчивость материала частицы χ_1 и её объём V .

Магнитный момент частицы:

$$P = VM = V \frac{\chi_1 B}{\mu_0}.$$

Изменение энергии частицы при увеличении внешнего поля:

$$dE = -V \frac{\chi_1}{\mu_0} B dB,$$

поэтому

$$E = -\frac{V \chi_1 B^2}{2\mu_0}$$

Ответ:

$$E = -\frac{V \chi_1 B^2}{2\mu_0}$$

B3 ^{1.10} Найдите выражение для положения лотка x , в котором он собирает минеральные частицы. Найдите численное значение для x .

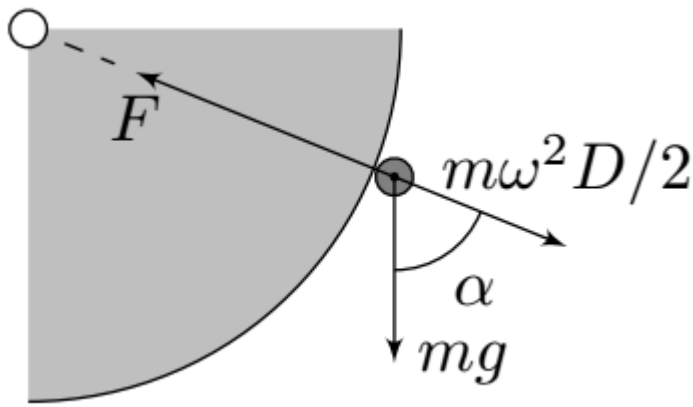
Найдем силу F с которой частица взаимодействует с роликом:

$$F = -\frac{dE}{dr} = -\frac{dE}{dB} \frac{dB}{dr} \Big|_{r=R_0} = -V \frac{\chi_1 B_0^2}{\mu_0 a} e^{-2R_0/a},$$

где знак минус указывает на притяжение.

В момент отрыва сила нормальной реакции равна нулю, поэтому условие отрыва:

$$F = mg \cos \alpha + m\omega^2 \frac{D}{2}.$$



Тогда угол α , которому соответствует отрыв:

$$\cos \alpha = \frac{\chi_1 B_0^2}{\mu_0 a \rho_1 g} e^{-2R_0/a} - \frac{\omega^2 D}{2g} > 1, \quad (1)$$

значит отрыв происходит при $\alpha = 0$.

Будем пренебрегать D по сравнению с d . Тогда частица при любых α в масштабах d вылетает из одной точки под углом α к горизонтали в момент отрыва. Найдем время полета t :

$$d = \frac{\omega D}{2} \sin \alpha t + \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t = -\frac{\omega D}{2g} \sin \alpha + \sqrt{\frac{\omega^2 D^2}{4g^2} \sin^2 \alpha + \frac{2d}{g}} \quad (2)$$

Воспользуемся тем, что $(\omega D/g)^2 \ll d/g$: $t = \sqrt{2d/g}$. Тогда с учетом $\alpha = 0$

$$x = \frac{D}{2} \sin \alpha - \frac{\omega D}{2} \cos \alpha \sqrt{\frac{2d}{g}} = -\frac{\omega D}{2} \sqrt{\frac{2d}{g}}$$

Ответ:

$$x = -\frac{\omega D}{2} \sqrt{\frac{2d}{g}} = -22.7 \text{ см}$$

В4^{1.10}

Найдите выражение и численное значение для ширины пучка частиц Δ_0 в направлении оси x около лотка.

Для частиц разного размера может отличаться $\cos \alpha$ и эффективный диаметр D . Для указанного диапазона размеров все частицы отрываются в нижней точке, а D меняется в диапазоне $[D + 1.8R_0, D + 2.2R_0]$. Также в ширину пучка вносит вклад размер самих частицы

$$\Delta_0 = \left| \frac{dx}{dD} \right| \cdot 0.4R_0 + 2R_0 = 2.1 \text{ мм}$$

Ответ:

$$\Delta_0 = \left| \frac{dx}{dD} \right| \cdot 0.4R_0 + 2R_0 = 2.1 \text{ мм}$$

В5^{1.10}

Найдите выражение для угловой скорости магнитного ролика ω , при которой можно отдельно получить частицы двух типов. Найдите численное значение ω . Считайте известной ширину обоих лотков Δ .

Согласно уравнению (1) максимально значение $\cos \alpha$, то есть минимальный угол $\alpha_{\min}$, когда происходит отрыв, задается выражением

$$\cos \alpha_{\min} = \frac{\chi B_0^2}{\mu_0 a \rho g} e^{-2R_0/a} \Rightarrow \cos \alpha_{\min,1} = 2.44, \quad \cos \alpha_{\min,2} = 0.29,$$

таким образом частицы 1-го типа могут отрываться в любом месте диска, а частицы 2-го типа при $\alpha \geq \alpha_{\min,2} = \arccos 0.29$.

Нижнее ограничение на угловую скорость мы получаем в том случае, когда частицы первого типа отрываются в самом низу, а частицы второго типа отрываются при каком-то α_2 .

Верхнее ограничение на угловую скорость мы получаем в том случае, когда частицы первого типа отрываются при каком-то α_1 , а частицы второго типа отрываются немного ниже.

Расстояние Δx между частицами двух типов приравняем к Δ , считая это критерием разделения.

Для первого случая найдем угол α_1 , когда частицы 2-го типа должны отрываться (частицы 1-го типа отрываются при $\alpha = 0$):

$$\left(\frac{D}{2} \sin \alpha - \frac{\omega D}{2} \cos \alpha \sqrt{\frac{2d}{g}} \right) - \left(-\frac{\omega D}{2} \sqrt{\frac{2d}{g}} \right) = \Delta$$

для анализа удобнее выразить ω из уравнения (1) и подставить:

$$\sin \alpha + (1 - \cos \alpha) \sqrt{\frac{d}{D}} \sqrt{\frac{\chi_2 B_0^2}{\mu_0 a \rho_2 g} e^{-2R_0/a} - \cos \alpha} = 1.$$

Это уравнение не имеет решений, поэтому нижняя граница реализуется в случае, когда $\alpha_2 = \pi/2$:

$$\frac{D}{2} + \frac{\omega D}{2} \sqrt{\frac{2d}{g}} = \Delta, \quad \omega_{\min} = \left(\frac{2\Delta}{D} - 1\right) \sqrt{\frac{g}{2d}} = 2\pi \cdot 190 \text{ мин}^{-1}$$

Для второго случая

$$\frac{D}{2} - \left(\frac{D}{2} \sin \alpha - \frac{\omega D}{2} \cos \alpha \sqrt{\frac{2d}{g}}\right) = \Delta.$$

Также выразим ω через α с помощью уравнения (1), описывающего отрыв:

$$\sin \alpha - \cos \alpha \sqrt{\frac{d}{D}} \sqrt{\frac{\chi_2 B_0^2}{\mu_0 a \rho_2 g} e^{-2R_0/a} - \cos \alpha} = 1 - \frac{2\Delta}{D}.$$

Это уравнение также не имеет решений, значит нужно перестать работать в приближении $(\omega D/g)^2 \ll d/g$ то есть заменить $\sqrt{2d/g}$ на $\frac{\omega D}{2g} \sin \alpha + \sqrt{\frac{\omega^2 D^2}{4g^2} \sin^2 \alpha + \frac{2d}{g}}$ согласно (2). Тогда численное решение дает $\alpha_1 = 0.629$ и $\omega_{\max} = 2\pi \cdot 270 \text{ мин}^{-1}$.

Ответ:

$$\omega_{\min} = \left(\frac{2\Delta}{D} - 1\right) \sqrt{\frac{g}{2d}} = 2\pi \cdot 190 \text{ мин}^{-1}$$

$$\omega_{\max} = 2\pi \cdot 270 \text{ мин}^{-1}$$