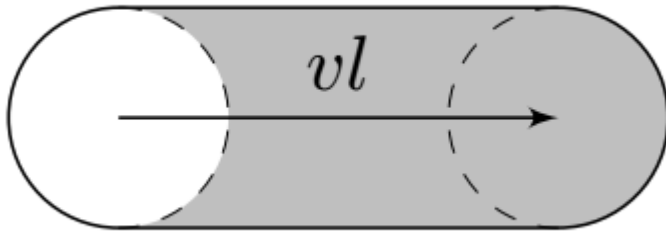


A1^{1.00} Сколько $F_1(t)$ атомов ${}^3\text{He}$ успевают хотя бы один раз столкнуться с нитями аэрогеля за время $t \in [1 \text{ фс}; 1 \text{ пс}]$? Вычислите $F_1(10 \text{ фс})$

За время t атом ${}^3\text{He}$ проходит расстояние vt . Оценим нижнюю и верхнюю границу для vt : $vt \in [5 \cdot 10^{-4}, 0.5] \text{ нм}$.

Круг радиусом r пересекается с прямой длиной vt если его центр лежит внутри фигуры площадью $\pi r^2 + 2rvt$. При этом нужно вычесть площадь πr^2 , соответствующую центрам кругов, которые пересекают начальную точку.



Тогда вероятность p того, что на пути атома встретилась нить $p = n \cdot 2rvt \ll 1$. Значит их количество $F_1(t) = 2rvtnN$

Ответ:

$$F_1(t) = 2rvtnN, \quad F_1(10 \text{ фс}) \approx 10^4$$

A2^{1.00} Сколько $G(t)$ столкновений в среднем испытывает атом ${}^3\text{He}$ за время t ?

Рассмотрим площадь $\frac{N_0}{n}$ на которой равномерно распределены все N_0 нитей аэрогеля. Тогда вероятность $p_k(t)$ того, что за время t атом столкнулся с k нитями задается выражением:

$$p_k = \frac{N_0!}{(N_0 - k)! k!} \left(\frac{2rvtn}{N_0} \right)^k \left(1 - \frac{2rvtn}{N_0} \right)^{N_0 - k} = \frac{N_0!}{(N_0 - k)! k!} \frac{\left(\frac{2rvtn}{N_0} \right)^k}{\left(1 - \frac{2rvtn}{N_0} \right)^k} \left(1 - \frac{2rvtn}{N_0} \right)^{N_0}$$

известным, как распределение Бернулли.

Возьмем предел при $N_0 \rightarrow \infty$:

$$p_k(t) \rightarrow \frac{N_0^k}{\left(\frac{N_0}{2rvtn} - 1 \right)^k} \frac{e^{-2rvtn}}{k!} = (2rvtn)^k \cdot \frac{e^{-2rvtn}}{k!}$$

и получим известное выражение для распределения Пуассона, если ввести обозначение $2rvn = \lambda$:

$$p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

Среднее количество столкновений за время t тогда задается выражением:

$$G(t) = \sum_1^\infty k p_k = \sum_1^\infty k \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = \lambda t e^{-\lambda t} \sum_0^\infty \frac{(\lambda t)^k}{k!} = \lambda t$$

Ответ:

$$G(t) = 2rvnt$$

A3^{1.00} Сколько $F_2(t)$ атомов ${}^3\text{He}$ ни разу не столкнется с нитями аэрогеля за время $t \in [1 \text{ фс}; 0.1 \text{ мкс}]$? Вычислите $F_2(10 \text{ нс})$.

В терминах предыдущего пункта $F_2(t) = N p_0(t) = N e^{-\lambda t}$

Ответ:

$$F_2(t) = N e^{-2rvnt}, \quad F_2(10 \text{ нс}) \approx 0.36 \cdot 10^{10}$$

A4^{2.00} Какое количество $S(\phi, \Delta\phi)$ атомов ${}^3\text{He}$ при первом столкновении изменит направление скорости на угол $\alpha \in [\phi; \phi + \Delta\phi]$, где $\Delta\phi \in [10^{-5}; 10^{-3}]$, $\phi \in [10^{-1} - \pi; 10^{-1}] \cup [10^{-1}; \pi - 10^{-1}]$. Считайте угол положительным при изменении направления против часовой стрелки. Вычислите $S(\pi/2, 10^{-4})$.

Пусть атом налетает на нить справа на расстоянии h от центра. Направление его скорости меняется на угол $\alpha = -\pi + 2 \arcsin \frac{h}{R}$ при $h > 0$ и на угол $\alpha = \pi - 2 \arcsin \frac{h}{R}$ при $h < 0$.

Если атом налетает на нить слева, то при $h > 0$ угол $\alpha = \pi - 2 \arcsin \frac{h}{R}$, при $h < 0$ угол $\alpha = -\pi + 2 \arcsin \frac{h}{R}$.

Высота h принимает равновероятно любое значение от 0 до R , то есть вероятность $p_{\Delta h} = \frac{\Delta h}{R}$ - вероятность того, что высота h лежит внутри какого-то отрезка длины Δh вложенного в отрезок $[0, R]$.

Изменению направления скорости на угол ϕ ($\phi > 0$) соответствует $h = R \sin \frac{\pi - \phi}{2} = R \cos \frac{\phi}{2}$. Значит изменению направления скорости на угол $\phi + \Delta \phi$ соответствует $h - \Delta h = R \cos \frac{\phi + \Delta \phi}{2}$. Воспользуемся тем, что $\Delta \phi \ll \phi$:

$$\Delta h = R \sin \frac{\phi}{2} \cdot \frac{\Delta \phi}{2}$$

Тогда вероятность p того, что $\alpha \in [\phi, \phi + \Delta \phi]$:

$$p = \frac{1}{2} p_{\Delta h} = \frac{\Delta \phi}{4} \sin \frac{\phi}{2}.$$

Заменой $\phi \rightarrow |\phi|$ рассматриваются случаи $\phi < 0$. В итоге $S(\phi, \Delta \phi) = \frac{N \Delta \phi}{4} \sin \frac{|\phi|}{2}$.

Ответ:

$$S(\phi, \Delta \phi) = \frac{N \Delta \phi}{4} \sin \frac{\phi}{2}, \quad S(\pi/2, 10^{-4}) \approx 0.177 \cdot 10^6$$

A5 1.00

Какое среднее расстояние $\langle \lambda \rangle$ пройдет атом ^3He до первого столкновения с нитью аэрогеля? Приведите формулу и численный ответ.

Из пункта A2 вероятность того, что за время t произойдет один удар задается формулой $p_1(t) = 2rvn \cdot e^{-2rvnt}$. Говоря в других терминах, вероятность p того, что пройдя расстояния l , атом ударился ровно один раз $p(l) = 2rln \cdot e^{-2rln}$. Это значит то, что вероятность $p(l, l + dl)$ того, что удар произошел в отрезке $[l, l + dl]$ равна $p(l, l + dl) = e^{-2rln} \cdot 2rn \, dl$.

Тогда по определению среднего:

$$\langle \lambda \rangle = \int_0^\infty l p(l, l + dl) = \frac{1}{2rn} \int_0^\infty u e^{-u} du$$

Интеграл $I = \int_0^\infty u e^{-u} du$ возьмем по частям:

$$I = - \int_0^\infty u d(e^{-u}) = -u e^{-u} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-u} du = 1.$$

Ответ:

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{2rn} \approx 5 \text{ мкм}$$

A6 1.00

Каков средний квадрат этого расстояния $\langle \lambda^2 \rangle$? Приведите формулу и численный ответ.

По определению среднего:

$$\langle \lambda^2 \rangle = \int_0^\infty l^2 p(l, l + dl) = \frac{1}{4r^2n^2} \int_0^\infty u^2 e^{-u} du.$$

Полученный интеграл сводится к взятому в предыдущей части:

$$\int_0^\infty u^2 e^{-u} du = -u^2 e^{-u} \Big|_0^\infty + 2 \int_0^\infty u e^{-u} du = 2$$

Ответ:

$$\langle \lambda^2 \rangle = \frac{1}{2r^2n^2} = 50 \text{ мкм}^2$$

A7 3.00

Каков средний квадрат смещения $\langle r^2 \rangle$ атома ^3He за время $t \in [1 \text{ мкс}; 1 \text{ мс}]$ с момента запуска? Вычислите $\langle r^2 \rangle$ (10 мкс).

За время $t \gg \frac{\langle \lambda \rangle}{v}$ атом в среднем испытает $m = \frac{vt}{\langle \lambda \rangle}$ столкновений. То есть его положение $\vec{r}$ будет задаваться следующей суммой:

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^m \vec{\lambda}_i$$

где $\vec{\lambda}_i$ - векторы между точками соударения.

В силу перестановочности операций суммирования и усреднения получим:

$$\langle \vec{r}^2 \rangle = \sum_{i=1}^m \langle \vec{\lambda}_i^2 \rangle + \sum_{i \neq j} \langle \vec{\lambda}_i \cdot \vec{\lambda}_j \rangle = m \langle \lambda^2 \rangle + 2 \sum_{i=1}^m \sum_{p=1}^{m-i} \langle \vec{\lambda}_i \cdot \vec{\lambda}_{i+p} \rangle,$$

причем длины векторов $\vec{\lambda}_i$ и $\vec{\lambda}_{i+p}$ являются независимыми переменными. Таким образом нас интересуют средние вида $\langle \cos(\vec{\lambda}_i \wedge \vec{\lambda}_{i+p}) \rangle$. Найдём их итерационно:

$$\begin{aligned} \langle \cos(\vec{\lambda}_i \wedge \vec{\lambda}_{i+p}) \rangle &= \langle \cos(\vec{\lambda}_i \wedge \vec{\lambda}_{i+p-1} + \vec{\lambda}_{i+p-1} \wedge \vec{\lambda}_{i+p}) \rangle = \langle \cos(\vec{\lambda}_i \wedge \vec{\lambda}_{i+p-1}) \cos(\vec{\lambda}_{i+p-1} \wedge \vec{\lambda}_{i+p}) - \sin(\vec{\lambda}_i \wedge \vec{\lambda}_{i+p-1}) \sin(\vec{\lambda}_{i+p-1} \wedge \vec{\lambda}_{i+p}) \rangle = \\ &= \langle \cos(\vec{\lambda}_i \wedge \vec{\lambda}_{i+p-1}) \cos \phi \rangle - \langle \sin(\vec{\lambda}_i \wedge \vec{\lambda}_{i+p-1}) \sin \phi \rangle \end{aligned}$$

С точки зрения угла ϕ последнее столкновение никак не зависит от истории столкновений, поэтому средние можно расцепить. При этом

$$\langle \cos \phi \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos u \frac{S(u, du)}{N} = 2 \int_0^{\pi} \frac{du}{4} \cos u \sin \frac{u}{2} = -2 \int_0^{\pi} \cos^2 \frac{u}{2} d \left(\cos \frac{u}{2} \right) + \int_0^{\pi} d \left(\cos \frac{u}{2} \right) = -\frac{1}{3}$$

$$\langle \sin \phi \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin u \frac{S(u, du)}{N} = 0,$$

значит

$$\langle \cos(\vec{\lambda}_i \wedge \vec{\lambda}_{i+p}) \rangle = \left(-\frac{1}{3} \right) \langle \cos(\vec{\lambda}_i \wedge \vec{\lambda}_{i+p-1}) \rangle = \left(-\frac{1}{3} \right)^p.$$

Подставим это выражение в искомую сумму:

$$\langle \vec{r}^2 \rangle = \sum_{i=1}^m \langle \vec{\lambda}_i^2 \rangle + 2 \sum_{i \neq j} \langle \vec{\lambda}_i \cdot \vec{\lambda}_j \rangle = m \langle \lambda^2 \rangle + 2 \langle \lambda \rangle^2 \sum_{i=1}^m (m-i) \cdot \left(-\frac{1}{3} \right)^i \simeq m \langle \lambda^2 \rangle + 2 \langle \lambda \rangle^2 m \frac{-\frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = m \left(\langle \lambda^2 \rangle - \frac{1}{2} \langle \lambda \rangle^2 \right),$$

Ответ:

$$\langle r^2 \rangle(t) = vt \left(\frac{\langle \lambda^2 \rangle}{\langle \lambda \rangle} - \frac{\langle \lambda \rangle}{2} \right) = \frac{3vt}{4rn}, \quad \langle r^2 \rangle(10 \text{ нс}) = 37500 \text{ нм}^2$$