

A1 1.00

Найдите скорость распространения постоянной фазы монохроматической волны (фазовая скорость).

Пусть точка с фазой φ движется по траектории $x(t)$:

$$kx(t) - \omega t + \varphi_0 = \varphi,$$

тогда

$$x(t) = \frac{\varphi - \varphi_0}{k} + \frac{\omega}{k}t$$

Ответ:

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k}$$

A2 1.00

Предполагая, что существует некоторая функциональная зависимость $\omega(k)$, найдите групповую скорость через эту функцию в точке $k \approx k_1 \approx k_2$.

Запишем условие на положение максимума волнового пакета $x(t)$

$$\frac{dA}{dx} = A_0 \left[k_1 \sin(k_1 x(t) - \omega_1 t - \varphi_1) + (k_1 + \Delta k) \sin \left((k_1 + \Delta k)x(t) - \left(\omega_1 + \frac{d\omega}{dk} \Delta k \right) t - \varphi_2 \right) \right] = 0.$$

Используя формулу $\sin(\varphi + \Delta\varphi) \simeq \sin \varphi + \Delta\varphi \cdot \cos \varphi$, с точностью до малых второго порядка получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_0} \frac{dA}{dx} &\simeq k_1 [\sin(k_1 x(t) - \omega_1 t - \varphi_1) + \sin(k_1 x(t) - \omega_1 t - \varphi_2)] + \\ &+ \Delta k \sin(k_1 x(t) - \omega_1 t - \varphi_2) + \\ &+ k_1 \Delta k \left[x(t) - \frac{d\omega}{dk} t \right] \cos(k_1 x(t) - \omega_1 t - \varphi_2) \end{aligned}$$

Мы изучаем положение максимума, где $\cos(k_1 x(t) - \omega_1 t - \varphi_1) \approx \cos(k_1 x(t) - \omega_1 t - \varphi_2) \approx 1$ и $\sin(k_1 x(t) - \omega_1 t - \varphi_1) \approx \sin(k_1 x(t) - \omega_1 t - \varphi_2) \approx 0$, поэтому уравнение на положение максимума имеет вид:

$$x(t) = \frac{d\omega}{dk} t$$

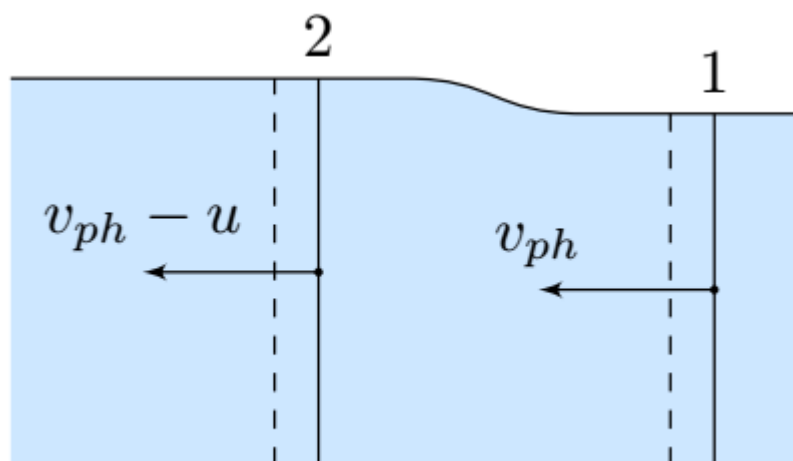
Ответ:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

B1 1.00

Найдите скорость распространения волны v_{ph} , если глубина воды h .

Воспользуемся стандартным методом нахождения фазовой скорости: перейдем в систему отсчета движущуюся со скоростью v_{ph} . В этой системе отсчета потоки жидкости являются стационарными. Этот факт заметно упрощает написание физических уравнений.



Во-первых, в силу стационарности в центральной области не должна накапливаться масса, т.е.

$$v_{ph} h = (v_{ph} - u)(h + \Delta h). \quad (1)$$

Во-вторых, должен выполняться второй закон Ньютона. В качестве рассматриваемого тела выберем область воды между срезами 1 и 2. За L обозначим толщину системы в направлении перпендикулярном плоскости рисунка. Запишем гидростатические силы $F_{1,2}$, действующие на поверхности 1 и 2. Будем пренебрегать гидродинамическим давлением.

$$F_1 = L \int_0^h \rho g h \, dh = \rho g L \frac{h^2}{2}, \quad F_2 = L \int_0^{h+\Delta h} \rho g h \, dh = \rho g L \frac{(h + \Delta h)^2}{2} \simeq \rho g L \frac{h^2 + 2h\Delta h}{2}.$$

За время dt правая поверхность 1 сдвинется на $dl_1 = v_{ph} dt$, ее масса $dm_1 = \rho L h dl_1 = \rho L h v_{ph} dt$. Аналогично $dm_2 = \rho L (h + \Delta h) (v_{ph} - u) dt$. За время dt под действием сил F_1 и F_2 импульс рассмотренного объема изменился на $dm_2(v_{ph} - u) - dm_1 v_{ph}$. Значит

$$\rho g L \frac{h^2}{2} dt - \rho g L \frac{h^2 + 2h\Delta h}{2} dt = dm_2(v_{ph} - u) - dm_1 v_{ph}.$$

Подстановка и сокращение дает выражение $g\Delta h = v_{ph}u$. Если подставить в него уравнение (1) и воспользоваться $\Delta h \ll h$, то получается ответ.

Ответ:

$$v_{ph} = \sqrt{gh}$$

В2 1.00

Найдите скорость распространения волны на глубокой воде. Найденная скорость является фазовой скоростью волны.

Ответ:

$$v_{ph} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

В3 1.00

Найдите дисперсионное соотношение и групповую скорость волн на мелкой воде $v_g(k)$.

Ответ:

$$\omega = k\sqrt{gh}, \quad v_g = v_{ph} = \sqrt{gh}$$

В4 1.00

Найдите дисперсионное соотношение и групповую скорость волн на глубокой воде $v_g(k)$.

Длина волны λ связана с волновым вектором соотношением $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, значит

$$\frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}} \Rightarrow \omega = \sqrt{gk}$$

Ответ:

$$\omega = \sqrt{gk}, \quad v_g = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{v_{ph}}{2}$$

С1 1.00

Найдите соотношение между фазовой скоростью и скоростью источника, если он должен оставаться в точке постоянной фазы волны.

Точка постоянной фазы двигается со скоростью $\frac{v_{ph}}{\cos \psi}$, поэтому $u = \frac{v_{ph}}{\cos \psi}$

$$u = \frac{v_{ph}}{\cos \psi}$$

С2 1.00

Найдите точку в которой будет находиться цуг через время dt .

За время dt цуг пройдет расстояние $v_g dt = \frac{1}{2} v_{ph} dt$ в направлении под углом ψ .

$$\begin{cases} dx = \frac{u}{2} \cos^2 \psi dt \\ dy = \frac{u}{2} \cos \psi \sin \psi dt \end{cases}$$

С3 1.00

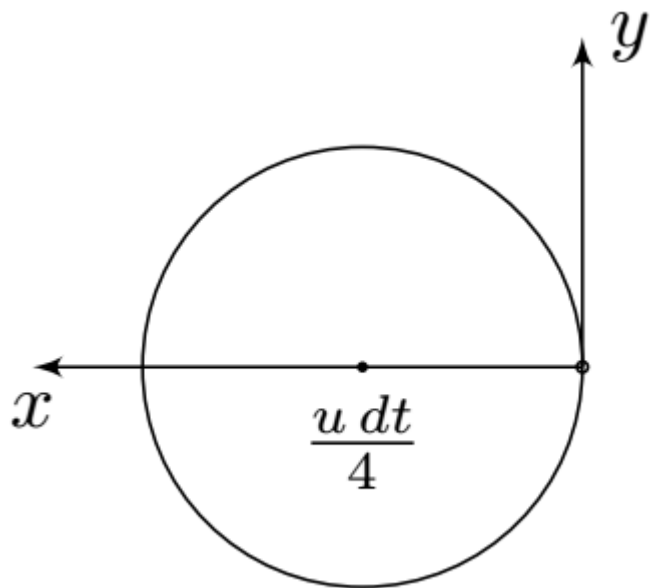
Найдите геометрическое место точек для цугов, испущенных под всевозможными углами.

Воспользуемся формулами двойного угла: $2 \cos^2 \psi = 1 + \cos 2\psi$, $\cos \psi \sin \psi = \frac{\sin 2\psi}{2}$, тогда

$$\begin{cases} dx = \frac{u}{4}(1 + \cos 2\psi) dt \\ dy = \frac{u}{4}\sin 2\psi dt \end{cases}.$$

Учитывая, что $\psi \in [-\pi, \pi]$, ГМТ – окружность радиусом $\frac{u dt}{4}$ с центром в точке $x = \frac{u dt}{4}$.

Ответ:



C4^{1.00} Найдите угол раствора конуса, который ограничивает все распространяющиеся волны

За время dt источник сдвигается на расстояние $u dt$, поэтому угол раствора подчиняется соотношению $\sin \alpha = \frac{\frac{3}{4}u dt}{\frac{1}{4}u dt} = \frac{1}{3}$

Ответ:

$$2\alpha = 2 \arcsin \frac{1}{3} \approx 39.0^\circ$$