

Road to IPhO

Физика бильярдных шаров

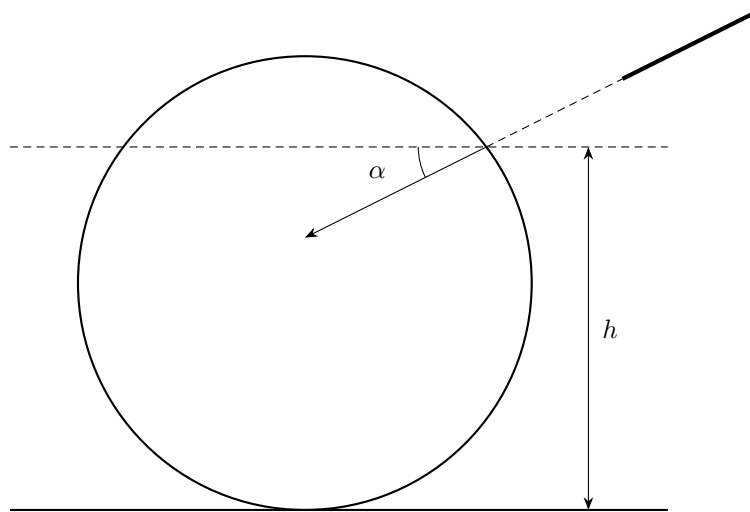
Бильярд — собирательное название нескольких настольных игр с различными правилами, в которых игрок использует деревянный стержень — кий для передвижения шаров по поверхности стола. Опытный игрок в бильярд знает, насколько важны для правильной игры физические характеристики шаров и кия и как во время игры можно использовать законы физики в свою пользу. В этой задаче мы исследуем некоторые сюжеты, связанные с физикой бильярдных шаров.

Во всех пунктах мы считаем бильярдный шар однородным телом радиуса R с моментом инерции $I = \frac{2}{5}mR^2$ относительно любой оси, проходящей через центр.

Часть А. Sweet spot (1.5 балла)

После удара кием о шар в общем случае шар может потерять часть своей начальной скорости, пока устанавливается движение, за счет трения при проскальзывании. Однако, хорошим игрокам в бильярд известна точка («sweet spot»), при ударе в которую шар не будет терять скорости при движении.

Будем считать, что удар по шару сосредоточен в некоторой точке на высоте h от стола; кий при этом ориентирован под углом α к поверхности стола ($-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$, см. рис.). Считайте, что сила удара такова, что при любых α шар не отрывается от стола. Трением о поверхность в этом пункте можно пренебречь.



A1 Определите, при каком соотношении между h и α после удара шар будет двигаться без проскальзывания. **1.0**

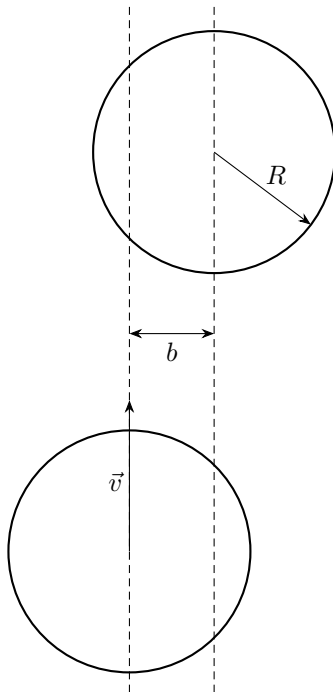
A2 Нарисуйте (качественно) график зависимости $\alpha(h/R)$ с указанием точек, соответствующих $\alpha = 0$ и $h = R$. **0.5**

Road to IPhO

Часть В. Столкновение бильярдных шаров на столе (4.5 балла)

В этой части задачи рассматривается столкновение двух бильярдных шаров. Трением между шарами при столкновении можно пренебречь, а удар — абсолютно упругий. Для начала также пренебрежем и трением о стол.

Пусть бильярдный шар («биток») налетает на такой же покоящийся со скоростью $\vec{v}$; относительный прицельный параметр (величина, отмеченная на рис.) равен $\frac{b}{R} < 2$.



В1 Найдите скорости шаров после разлёта (модули и направления).

1.0

В2 Какой угол образуют скорости шаров после разлёта в такой модели?

0.5

Простое предсказание, полученное в предыдущем пункте и часто используемое игроками в бильярд как эмпирическое правило, значительно меняется при учёте трения о поверхность стола. Особенно заметно влияние его на движение «битка».

В3 Рассмотрим вспомогательную задачу: шар на горизонтальном столе в начальный момент имеет поступательную скорость $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ и угловую скорость $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \end{pmatrix}$ (вектора $\vec{v}$ и $\vec{\omega}$ лежат в плоскости стола). Имеется трение о поверхность, которое прекращается, как только исчезает проскальзывание. Какова будет установившаяся скорость шара (модуль и направление)?

1.5

В4 Вернемся к столкновению двух шаров; пусть до удара «биток» двигался без проскальзывания. Под какими углами к начальной скорости теперь направлены установившиеся скорости шаров?

0.5

В5 Определите угол φ между установившимися скоростями шаров как функцию прицельного параметра $\frac{b}{R}$.

0.5

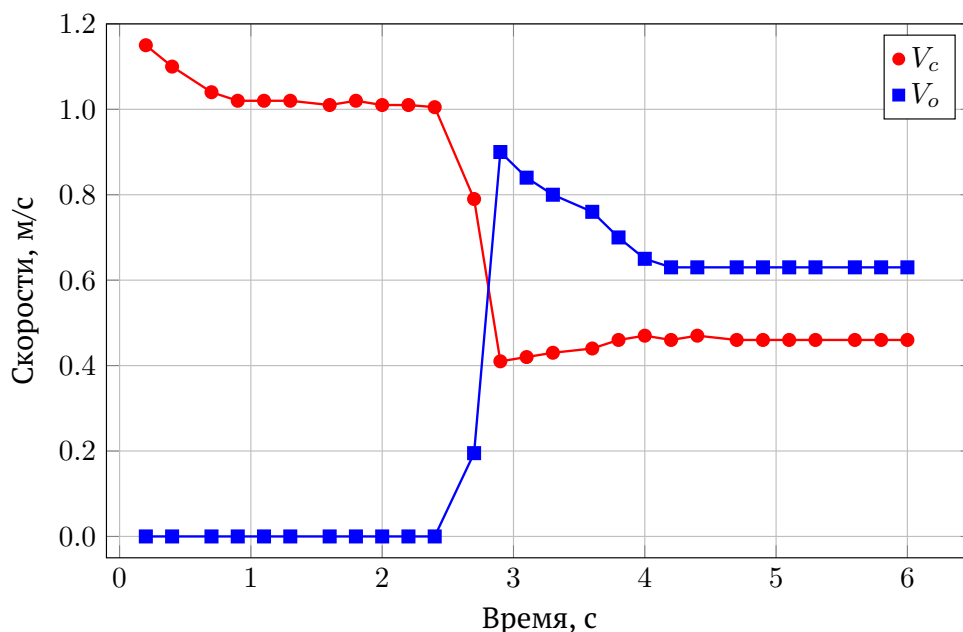
В6 Нарисуйте качественный график зависимости $\varphi(b/R)$.

0.5

Road to IPhO

Часть С. Анализ экспериментальных данных (2 балла)

Обратимся к экспериментальным данным, чтобы проверить рассмотренные нами модели. С помощью высокоскоростной съемки была получена зависимость скорости двух сталкивающихся шаров от времени; на графике обозначено V_c — скорость «битка» (cue ball), V_o — скорость изначально неподвижного шара (object ball).



C1 Определите коэффициент трения скольжения. Оцените погрешность полученного значения.

0.5

C2 Оцените относительные потери энергии при столкновении шаров.

0.5

C3 Определите относительный прицельный параметр b/R для столкновения, используя данные для обоих шаров. Оцените погрешность полученного значения.

1.0

Часть D. Модуль Юнга материала бильярдного шара (2 балла)

Известно, что сила F , действующая между двумя телами сферической формы, прижатыми друг к другу, зависит от деформации (расстояния, на которое сближаются центры шаров) h как (формула Герца)

$$F = k E R^{1/2} h^{3/2},$$

где k — численный коэффициент, $k \approx 1$, E — модуль Юнга материала, из которого сделаны шары, R — радиус шара.

D1 Рассмотрим центральный удар ($b = 0$) двух одинаковых шаров массы M . Первый шар налетает на второй со скоростью V . Считая скорость налетающего шара много меньшей скорости звука в материале шара, найдите время столкновения τ и максимальную деформацию h_m .

1.5

Указание: считайте известным значение интеграла

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{5/2}}} \approx 1.5.$$

D2 Оцените модуль Юнга материала шара, исходя из экспериментальных значений: $\tau = 310$ мкс, $V = 7.0$ м/с, $M = 280$ г, $R = 6.8$ см.

0.5