

A1 1.00 Определите, при каком соотношении между h и α после удара шар будет двигаться без проскальзывания.

Сообщенный шару горизонтальный импульс равен $\cos \alpha \int F(t) dt = mv$, где F — сила удара. С другой стороны, сообщённый момент импульса относительно центра масс

$$\frac{2}{5} m R^2 \omega = \left((h - R) \cos \alpha - \sqrt{R^2 - (h - R)^2} \sin \alpha \right) \int F(t) dt$$

В случае отсутствия проскальзывания $v = \omega R$, так что имеем соотношение

$$\frac{2}{5} = \frac{h - R}{R} - \sqrt{1 - \frac{(h - R)^2}{R^2}} \operatorname{tg} \alpha$$

Ответ:

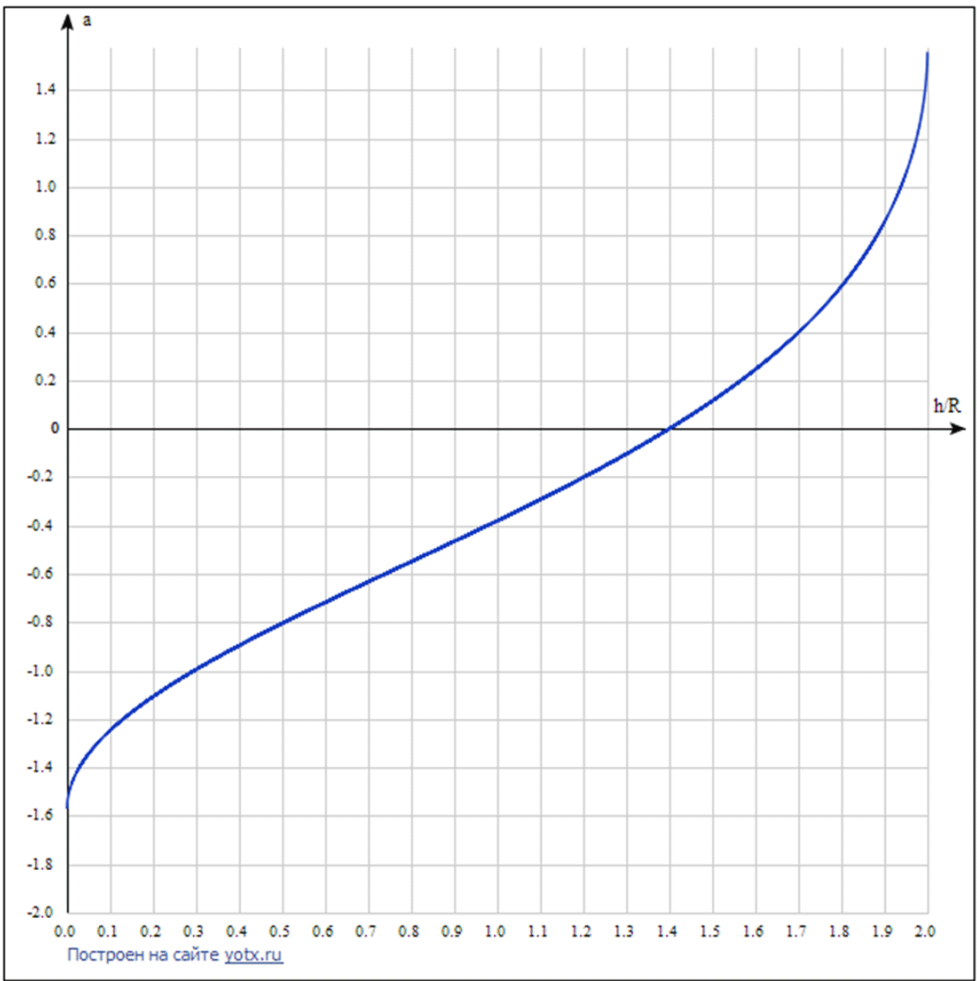
$$\frac{2}{5} = \frac{h - R}{R} - \sqrt{1 - \frac{(h - R)^2}{R^2}} \operatorname{tg} \alpha$$

A2 0.50 Нарисуйте (качественно) график зависимости $\alpha(h/R)$ с указанием точек, соответствующих $\alpha = 0$ и $h = R$.

Ответ:

$$\begin{aligned} \alpha = 0 &\implies h = \frac{7R}{5} \\ h = R &\implies \alpha = -\operatorname{arctg} \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Ответ:



B1 1.00 Найдите скорости шаров после разлёта (модули и направления).

Сила, действующая между шарами, направлена в их точке касания по линии, соединяющей центры в момент касания, то есть под углом $\phi = \arcsin \frac{b}{2R}$ к направлению движения. Отсюда следует, что сообщенная второму шару скорость также направлена вдоль этой прямой. Тогда ЗСИ вместе с ЗСЭ дают для скоростей шариков:

биток:

$$\vec{v}_c = \begin{pmatrix} -v \sin \phi \cos \phi \\ v \sin^2 \phi \end{pmatrix},$$

второй шар:

$$\vec{v}_o = \begin{pmatrix} v \sin \phi \cos \phi \\ v \cos^2 \phi \end{pmatrix}.$$

Т.е. $|\vec{v}_c| = v \sin \phi, |\vec{v}_o| = v \cos \phi$

Ответ:

$$|\vec{v}_c| = v \frac{b}{2R}, |\vec{v}_o| = v \sqrt{1 - \frac{b^2}{4R^2}}$$

В2 0.50

Какой угол образуют скорости шаров после разлёта в такой модели?

Скорость 2 шара направлена под углом ϕ к исходному направлению движения, а битка – под углом $\pi/2 - \phi$. Итого угол между скоростями шаров равен $\pi/2$.

Ответ:

$$\pi/2$$

В3 1.50

Рассмотрим вспомогательную задачу: шар на горизонтальном столе в начальный момент имеет поступательную скорость $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ и угловую скорость $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \end{pmatrix}$ (вектора $\vec{v}$ и $\vec{\omega}$ лежат в плоскости стола). Имеется трение о поверхность, которое прекращается, как только исчезает проскальзывание. Какова будет установившаяся скорость шара (модуль и направление)?

Момент импульса относительно точки касания в начальный момент равен

$$\vec{L} = \vec{L}_{\text{оцм}} + \vec{L}_{\text{цм}} = \frac{2}{5} m R^2 \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \end{pmatrix} + m R \begin{pmatrix} -v_y \\ v_x \end{pmatrix}$$

После установления движения он равен

$$\vec{L} = \frac{7}{5} m R \begin{pmatrix} -u_y \\ u_x \end{pmatrix}$$

Внешних моментов относительно точки касания не действует и она движется параллельно центру масс, так что момент импульса относительно нее сохраняется. Итого мы находим установившуюся скорость

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} v_x + \frac{2}{7} R \omega_y \\ \frac{5}{7} v_y - \frac{2}{7} R \omega_x \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} v_x + \frac{2}{7} R \omega_y \\ \frac{5}{7} v_y - \frac{2}{7} R \omega_x \end{pmatrix}$$

В4 0.50

Вернемся к столкновению двух шаров; пусть до удара «биток» двигался без проскальзывания. Под какими углами к начальной скорости теперь направлены установившиеся скорости шаров?

Известны скорости шаров сразу после удара:
биток:

$$\vec{v}_c = \begin{pmatrix} -v \sin \phi \cos \phi \\ v \sin^2 \phi \end{pmatrix}, \vec{\omega}_c = \begin{pmatrix} -v/R \\ 0 \end{pmatrix}$$

второй шар:

$$\vec{v}_o = \begin{pmatrix} v \sin \phi \cos \phi \\ v \cos^2 \phi \end{pmatrix}, \vec{\omega}_o = \vec{0}$$

Тогда установившиеся скорости:
биток:

$$\vec{u}_c = \begin{pmatrix} -\frac{5}{7}v \sin \phi \cos \phi \\ \frac{5}{7}v \sin^2 \phi + \frac{2}{7}v \end{pmatrix}$$

второй шар:

$$\vec{u}_o = \frac{5}{7} \begin{pmatrix} v \sin \phi \cos \phi \\ v \cos^2 \phi \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \phi_c &= \frac{\sin \phi \cos \phi}{\sin^2 \phi + \frac{2}{5}}, \\ \sin \phi_o &= \sin \phi, \end{aligned}$$

где $\sin \phi = b/2R$

B5 ^{0.50} Определите угол φ между установившимися скоростями шаров как функцию прицельного параметра $\frac{b}{R}$.

В терминах прицельного параметра $x = b/R$ угол разлета φ

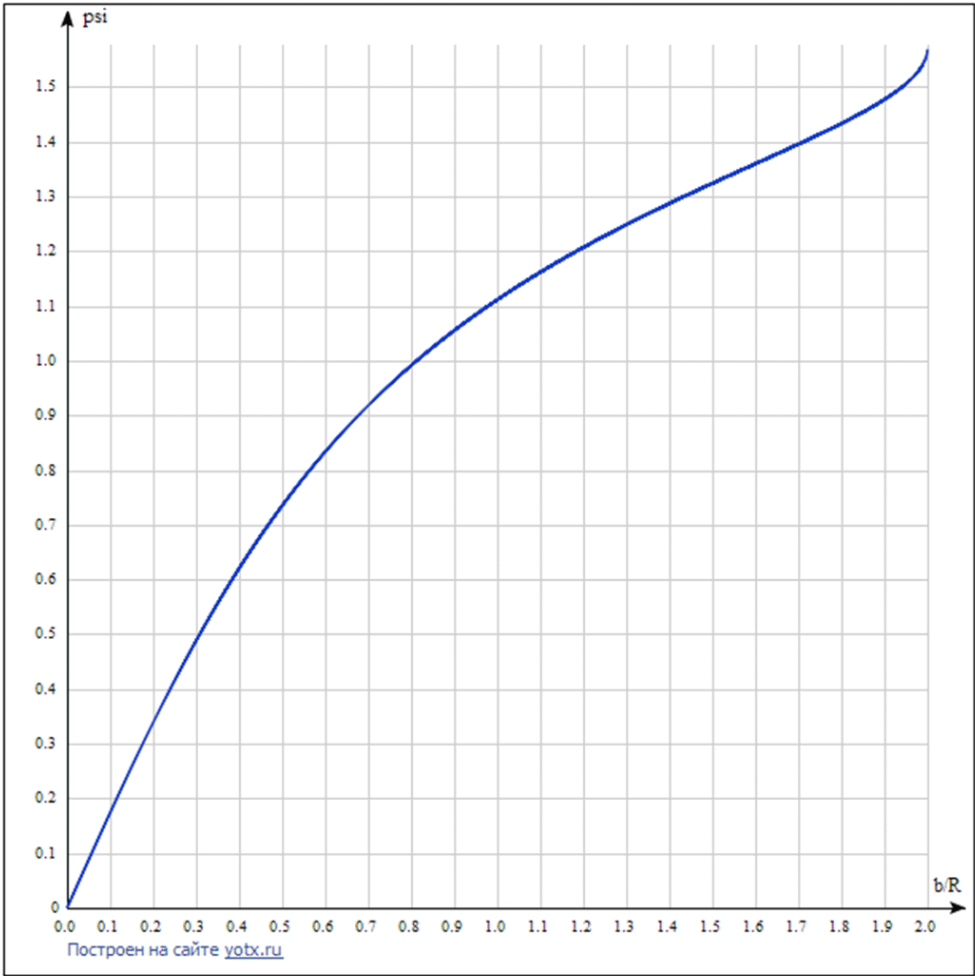
$$\varphi = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{\frac{x}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}}{\frac{2}{5} + \frac{x^2}{4}}\right)$$

Ответ:

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{\frac{x}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}}{\frac{2}{5} + \frac{x^2}{4}}\right), x = \frac{b}{R}$$

B6 ^{0.50} Нарисуйте качественный график зависимости $\varphi(\frac{b}{R})$.

Ответ:



C1 ^{0.50} Определите коэффициент трения скольжения. Оцените погрешность полученного значения.

Коэффициент трения скольжения узнаем по графику зависимости скорости 2 шара от времени (для 1 шара сила трения в общем случае не коллинеарна скорости), приближая участок графика со скольжением прямой. Получаем ускорение 2 шара $a = \mu g \approx (2.1 \pm 0.2) \text{ м/с}^2$; $\mu \approx 0.21 \pm 0.02$

Ответ:

$\mu \approx 0.023 \pm 0.002$

C2 ^{0.50} Оцените относительные потери энергии при столкновении шаров.

Сразу после столкновения имеем скорости шаров $v_c \approx 0.90 \text{ м/с}$, $v_o \approx 0.42 \text{ м/с}$. Разность между энергией до и после $\Delta E \approx 0.04 \text{ (м/с)}^2 \frac{m}{2}$; начальная энергия (вращательная + поступательная) $E_0 = \frac{7}{5} \frac{m}{2} \text{ (м/с)}^2$, так что потери энергии достаточно малы и составляют $\approx 5\%$.

Ответ:

5%

C3 ^{1.00} Определите относительный прицельный параметр $\frac{b}{R}$ для столкновения, используя данные для обоих шаров. Оцените погрешность полученного значения.

Для скоростей сразу после столкновения (и после установления) имеем

$$v_c = v \sin \phi, v_o = v \cos \phi, u_o = \frac{5}{7} v \cos \phi, u_c = \frac{5}{7} v \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{9}{5} \sin^2 \phi}$$

Используя данные из графика (в м/с)

$$v = 1.00, v_c = 0.42, v_o = 0.90, u_o = 0.63, u_c = 0.48$$

находим соответственно 4 значения для $\sin \phi = b/2R$ и оцениваем погрешность

$$\sin \phi = 0.44; 0.42; 0.47; 0.40$$

Итого $b/R = (0.86 \pm 0.08)$

Ответ:

$b/R = (0.86 \pm 0.08)$

D1 ^{1.50} Рассмотрим центральный удар ($b = 0$) двух одинаковых шаров массы M . Первый шар налетает на второй со скоростью V . Считая скорость налетающего шара много меньшей скорости звука в материале шара, найдите время столкновения τ и максимальную деформацию h_m .

Указание: считайте известным значение интеграла

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{5/2}}} \approx 1.5.$$

В задаче о столкновении шаров, поскольку скорость шаров много меньше скорости звука, можно считать, что в любой момент картина деформаций установилась и сила зависит от деформации как в статическом случае. Зависимость потенциальной энергии от деформации легко получить интегрированием силы

$$U = \frac{2}{5} E R^{\frac{1}{2}} h^{\frac{5}{2}}$$

В системе центра масс ЗСЭ имеет вид ($\mu = M/2$ — приведённая масса)

$$\frac{Mv^2}{2} + \frac{2}{5} E R^{\frac{1}{2}} h^{\frac{5}{2}} = \frac{MV^2}{2}$$

Где v — относительная скорость шаров, она же $\dot{h}$. Максимальная деформация

$$h_m = \left(\frac{5\mu V^2}{4ER^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{2}{5}}$$

Время деформации, т.е. время, в течение которого h меняется от 0 до h_m и обратно, можно найти как

$$\tau = 2 \int_0^{h_m} \frac{dh}{v} = \left(x = \frac{h}{h_m}\right) = \frac{2}{h_m^{\frac{1}{4}}} \left(\frac{5\mu}{4ER^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{\frac{5}{2}}}} \approx 3V^{-\frac{1}{5}} \left(\frac{5M}{8ER^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{2}{5}}$$

Ответ:

$$h_m = \left(\frac{5MV^2}{8ER^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{2}{5}}, \tau = 3V^{-\frac{1}{5}} \left(\frac{5M}{8ER^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{2}{5}}$$

D2 ^{0.50} Оцените модуль Юнга материала шара, исходя из экспериментальных значений: $\tau = 310$ мкс, $V = 7.0$ м/с, $M = 280$ г, $R = 6.8$ см.

Ответ:

$$E = \left(\frac{\tau V^{\frac{1}{5}}}{3}\right)^{-\frac{5}{2}} \cdot \frac{5m}{8R^{\frac{1}{2}}} \approx 2.3 \text{ ГПа}$$