

A1 0.80 Пусть труба адиабатически изолирована. Получите зависимость скорости газа от его температуры.

Ответ: ЗСЭ

$$P_0 dV_0 - PdV = dm \left(\frac{v^2 - v_0^2}{2} + \frac{C_V}{\mu} (T - T_0) \right)$$

Ответ: Преобразуя,получим

$$v^2 + \frac{2C_p}{\mu} T = const$$

Ответ: Ответ

$$v = \sqrt{v_0^2 + \cdot 2C_p \mu (T_0 - T)}$$

A2 0.70 Покажите, что при течении газа выполняется соотношение

$$v \frac{dv}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx}.$$

Закон изменения импульса для газа

$$-Sdp = adm$$

Равенство $a = v \frac{dv}{dx}$ доказывает требуемое

A3 0.50 Теперь к любому участку трубы длиной L подводится тепловая мощность $N = kL$. Получите выражение для скорости газа как функцию от x и T .

ЗСЭ

$$Ndt = P_0 dV_0 - PdV = dm \left(\frac{v^2 - v_0^2}{2} + C_V (T - T_0) \right)$$

Проведя преобразования,получим

$$v^2 = v_0^2 + \frac{2C_P}{\mu} (T_0 - T) + \frac{2N}{m}$$

Ответ

$$v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2C_P}{\mu} (T_0 - T) + \frac{2kx}{\rho_0 S_0 v_0}}$$

A4 0.50 Теперь и температура газа линейно зависит от x по закону $T = T_0 + \alpha x$. Покажите, что газ движется по трубе равноускоренно и найдите это ускорение a .

$$a = v \frac{dv}{dx} = -\frac{\alpha C_P}{\mu} + \frac{k}{\rho_0 S_0 v_0} = const, \text{ что доказывает требуемое}$$

A5 0.50 Получите уравнение политропного процесса с постоянной молярной теплоёмкостью C в координатах (P, ρ) .

$$C = C_V + \frac{\nu RT}{V} \frac{dV}{dT}$$

После интегрирования имеем $TV^{n-1} = const$

$$P\rho^{-n} = const$$

где $n = \frac{C_P - C}{C_V - C}$

A6^{1.20} Покажите, что в условиях пункта A4 газ движется так, будто бы находится в политропном процессе.

Из уравнения состояния и условия $\alpha = \frac{dT}{dx} = const$ имеем

$$a = v \frac{dv}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} = -\frac{RT}{\mu P} \frac{dP}{dT} \frac{dT}{dx} = -\frac{\alpha R}{\mu} \frac{T}{P} \frac{dP}{dT}$$

Но поскольку $a = -\frac{\alpha C_P}{\mu} + \frac{k}{\rho_0 S_0 v_0} = const$

$$\frac{T}{P} \frac{dP}{dT} = \frac{\mu}{\alpha R} \left(\frac{\alpha C_P}{\mu} - \frac{k}{\rho_0 S_0 v_0} \right) = const \text{ - уравнение политропы}$$

После интегрирования имеем

$$TP^{\frac{1}{\frac{\mu k}{\alpha R \rho_0 S_0 v_0} - \frac{C_P}{R}}} = TP^{\frac{R}{C - C_P}} = const$$

Для дальнейшего решения отметим, что

$$C = \frac{\mu k}{\alpha \rho_0 S_0 v_0}$$

A7^{0.80} Получите выражение для плотности газа как функцию x .

Из уравнения политропы

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{1}{1-n}}$$

Находя n из A6, получим

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{T_0}{T_0 + \alpha x} \right)^{1 - \frac{C_P}{R} + \frac{\mu k}{\alpha R \rho_0 S_0 v_0}}$$

B1^{0.10} Найдите массовый расход газа $\dot{m}$.

$$\dot{m} = \rho_0 S_0 v_0$$

В2 0.80

Найдите теплоты $\delta Q_{ab}, \delta Q_{bc}, \delta Q_{cd}, \delta Q_{da}$, полученные порцией газа массой dm на данных участках четырехугольника. Ответы могут быть выражены через $v_a, S_a, T_a, \rho_a, \mu, C_P, \alpha, A, \beta, B, L_1, L_2, L_3, L_4$ и dm .

Из первого начала термодинамики и пункта А6

$$\frac{\delta Q}{dm} = \frac{C}{\mu}(T - T_0)$$

Подставляя в последнее уравнение выражение для теплоёмкости,полученное в А6 и разницы температур,имеем

$$Q_1 = \frac{\alpha dm}{\rho_0 S_0 v_0} L_1 \$, \$Q_2 = \frac{\beta dm}{\rho_0 S_0 v_0} L_2 \$, \$Q_3 = -\frac{\alpha dm}{\rho_0 S_0 v_0} L_3 \$, \$Q_4 = -\frac{\beta dm}{\rho_0 S_0 v_0} L_4$$

В3 1.00

Получите β и B через $v_a, S_a, T_a, \rho_a, \mu, C_P, \alpha, A, L_1, L_2, L_3, L_4$.

Поскольку состояние стационарное,четырёхугольник получает нулевую тепловую мощность. Отсюда

$$\alpha(L_1 - L_3) + \beta(L_2 - L_4) = 0$$

Тогда ответ на первый вопрос: $\beta = \alpha \frac{L_1-L_3}{L_4-L_2}$

Найдём разницу температур в точках c и a двумя способами

$$T_c - T_a = AL_1 + BL_2 = AL_3 + BL_4$$

Отсюда ответ на второй вопрос: $B = A \frac{L_1-L_3}{L_4-L_2}$

В4 1.50

Докажите, что для стационарности такой системы необходимо, чтобы молярная теплоёмкость газа была постоянна в течении всего цикла.

В пункте А6 мы получили

$$C = \frac{\mu}{\rho_0 S_0 v_0} \frac{dN}{dx} \frac{dx}{dT}$$

Для ab и cd

$$C_1 = \frac{\mu \alpha}{A \rho_0 S_0 v_0}$$

Для bc и da

$$C_2 = \frac{\mu \beta}{B \rho_0 S_0 v_0}$$

Поскольку из пункта B_3 следует, что $\frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{B}$

$$C_1 = C_2$$

Поскольку процессы во всех трубах политропные, молярная теплоёмкость газа одинакова во всём процессе

B5^{0.70} Найдите ускорения a_{ab} и a_{bc} через $v_a, S_a, T_a, \rho_a, \mu, C_P, \alpha, A, L_1, L_2, L_3, L_4$.

Подставляя A, B, α, β в выражение в пункте $A4$, имеем

$$a_{ab} = -\frac{AC_P}{\mu} + \frac{\alpha}{\rho_0 S_0 v_0}$$

$$a_{bc} = \left(-\frac{\alpha C_P}{\mu} + \frac{k}{\rho_0 S_0 v_0}\right) \frac{L_1 - L_3}{L_4 - L_2} = a_{ab} \frac{B}{A}$$

B6^{0.50} Найдите скорости v_b, v_c и v_d через $v_a, S_a, T_a, \rho_a, \mu, C_P, \alpha, A, L_1, L_2, L_3, L_4$.

Подставляя ранее полученные результаты в формулу $v^2 = v_0^2 + 2a_x x$, имеем

$$v_b^2 = v_0^2 + 2a_{ab} L_1$$

$$v_c^2 = v_0^2 + 2(a_{ab} L_1 + a_{bc} L_2)$$

$$v_d^2 = v_0^2 + 2a_{bc} L_4$$

B7^{0.20} Найдите минимальное время t , через которое газ возвращается в начальное положение. Ответ выразите через скорости в точках пересечения труб и ускорения в трубах (пункт не оценивается, если не выполнены B5 и B6).

Выразим время через изменения скорости на отдельных участках трубы и ускорения в них

$$t = \frac{v_b + v_c - v_a - v_d}{a_{ab}} + \frac{v_c + v_d - v_a - v_b}{a_{bc}}$$

B8^{0.20} Найдите массу газа в трубе. Ответ выразите через $\dot{m}$ и t (пункт не оценивается, если не выполнены B5 и B6).

Масса газа в трубе $m = \dot{m} t$