

A1 0.20 Найдите степени p, q, r .

Методом размерностей получаем: $p = 1, q = r = 2$.

A2 0.30 Для некоторого самолёта при горизонтальном полёте оказалось $K = c_y/c_x = 15$. Определите, чему в этом случае равна сила тяги F , направленная горизонтально, если масса самолёта $m = 15$ т, ускорение свободного падения $g = 9.8$ м/с².

Сила тяжести уравнивается подъёмной силой, сила тяги – силой сопротивления.

$$F = X = \frac{Y}{K} = \frac{mg}{K} = 9.8 \text{ кН}$$

A3 1.00 С помощью указанного графика (рис. 2), определите, на какое максимальное расстояние S по горизонтали может переместиться самолёт при планировании, если по вертикали он опустится на расстояние $H = 1$ км. При планировании двигатели самолёта выключены, то есть сила тяги равна нулю, а скорость самолета постоянна.

На самолёт действуют три силы: сила тяжести mg (вниз), сила сопротивления X (под углом к γ горизонту, против скорости), подъёмная сила Y (под углом γ к вертикали, перпендикулярно скорости). Связь расстояний и сил:

$$\frac{L}{H} = \operatorname{tg} \gamma = \frac{Y}{X} = \frac{c_y}{c_x}.$$

Чтобы пролететь максимальное расстояние – необходимо максимизировать отношение c_y к c_x . Проводим на графике касательную с максимальным коэффициентом наклона и находим $L \approx 26$ км

A4 1.50 Зная, что сила сопротивления $X = c_x \rho^p v^q L^r = \beta v^q$, найдите, как скорость самолёта v зависит от пройденного расстояния s . Считайте, что в начальный момент скорость равна нулю. Ответ выразите через силу тяги F_T , коэффициент β , массу самолёта m , пройденное расстояние s .

Закон сохранения энергии

$$dK = Fds - \beta v^2 ds,$$

$$\frac{d(\beta v^2)}{F - \beta v^2} = \frac{2\beta}{m} ds$$

$$v(s) = \sqrt{\frac{F}{\beta} \left[1 - \exp\left(\frac{-2\beta}{m} l\right) \right]}$$

A5 1.50 Определите дальность полёта S .

Связь между величинами

$$N = Xv = \frac{Y}{K} v = \frac{mg}{K} \frac{dS}{dt} = \frac{-mg}{K} \frac{dS}{dm} \mu.$$

После интегрирования получаем ответ

$$S = \frac{NK}{\mu g} \ln\left(\frac{m_0}{m_1}\right).$$

B1 1.20 Укажите, какие из этих 4 схем будут являться устойчивыми (стремятся сохранить горизонтальное положение), неустойчивыми (самопроизвольно отклоняются от горизонтального положения), безразличными (ни то, ни другое)? Считайте, что $|\alpha_c| = \alpha$, и что силы Y и u линейно зависят от α . Ответ обоснуйте с помощью формул, схем или рисунков.

Рассмотрим момент сил относительно центра масс, который возникает при отклонении от горизонтального положения на некий угол $\delta\alpha$. За положительное значение возьмём вращение по часовой стрелке.
Схема А и В (безразличное равновесие):

$$\delta M_A = \frac{Y}{\alpha} \delta\alpha \cdot l - \frac{y}{\alpha} \delta\alpha \cdot l_c = \frac{Yl - yl_c}{\alpha} \delta\alpha = 0.$$

Схема Б (устойчивое равновесие):

$$\delta M_{\text{Б}} = -\frac{Y}{\alpha} \delta \alpha \cdot l + \frac{y}{\alpha} (-\delta \alpha) \cdot l_c = -\frac{Yl + yl_c}{\alpha} \delta \alpha < 0.$$

Схема Г (неустойчивое равновесие):

$$\delta M_{\text{Г}} = +\frac{Y}{\alpha} \delta \alpha \cdot l - \frac{y}{\alpha} (-\delta \alpha) \cdot l_c = +\frac{Yl + yl_c}{\alpha} \delta \alpha > 0.$$

C1 1.00

Определите подъёмную силу крыла Y , если плотность окружающей среды ρ . Считайте, что удары молекул абсолютно упругие.

Изменение импульса молекулы при ударе (проекция на перпендикулярное крылу направление):

$$\Delta p = -2mv_1 \sin \alpha,$$

где m – масса молекулы.

На крыло в единицу времени попадает $nv_1S \sin \alpha$ молекул, где n – концентрация молекул. Сила, с которой молекулы действуют на крыло:

$$F = 2\rho v_1^2S \sin^2 \alpha.$$

Подъёмная сила – проекция силы на вертикальную ось:

$$Y = 2\rho v_1^2S \sin^2 \alpha \cos \alpha.$$

C2 0.50

При каком угле атаки крыла α_M подъёмная сила максимальна? Определите это максимальное значение подъёмной силы.

Максимум функции $\sin^2 \alpha \cos \alpha$ получается при

$$\alpha_M = \operatorname{arctg} \sqrt{2}.$$

Он равен

$$Y_M = \frac{4}{3\sqrt{3}} \rho v_1^2S = 0.77 \rho v_1^2S.$$

C3 0.50

Оцените по порядку, чему должна быть равна толщина теплоизоляции h , чтобы температура теплоизоляции (и аппарата) не успела выровняться.

Из соображений размерности

$$\tau = \frac{\rho ch^2}{\lambda}.$$

Отсюда

$$h = \sqrt{\frac{\lambda \tau}{\rho c}} = 1 \text{ см}.$$

D1 0.30

Найдите модуль и направление скорости цилиндра, при которой он будет двигаться горизонтально без ускорения. Масса цилиндра M . Ускорение свободного падения g .

Модуль скорости из равенства сил:

$$v = \frac{Mg}{2\pi R^2 L \rho \omega}.$$

Направление скорости - вправо.

D2 1.50

Вращающийся цилиндр отпустили в поле тяжести без начальной скорости. Укажите зависимости координат x и y от времени t . Качественно нарисуйте траекторию движения цилиндра.

Уравнение движения для горизонтальной оси:

$$a_x = k\omega v_y, \quad k = \frac{2\pi R^2 L \rho}{m}.$$

Уравнение движения для вертикальной оси:

$$a_y = g - k\omega v_x.$$

Зависимость координат от времени получается интегрированием уравнением

$$x(t) = \frac{g}{k\omega}t - \frac{g}{k^2\omega^2}\sin k\omega t, \quad y(t) = \frac{g}{k^2\omega^2} - \frac{g}{k^2\omega^2}\cos k\omega t.$$

Таким образом можно сказать, что накладывается вращательное движение с угловой частотой

$$\Omega = k\omega = \frac{2\pi R^2 L \rho \omega}{m},$$

и поступательное движение с дрейфовой скоростью

$$v = \frac{g}{k\omega} = \frac{mg}{2\pi R^2 L \rho \omega}.$$

D3^{0.50} Определите максимальную скорость v_{max} центра цилиндра для движения, описанного в D2.

Максимальная скорость будет в низшей точке траектории, которая находится на $2\frac{g}{k^2\omega^2}$ ниже. Из ЗСЭ

$$v_{\max} = \frac{2g}{k\omega} = \frac{mg}{\pi R^2 L \rho \omega}.$$