

A1 0.50 Магнитное поле ослабляется с увеличением расстояния, для заданного угла θ найдите зависимость магнитного поля B на расстоянии r от диполя.

Зависимость магнитного поля диполя от $\vec{r}$:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3\vec{r}(\vec{m} \cdot \vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right), \vec{m} \cdot \vec{r} = mr \cos \theta \Rightarrow$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{m\mu_0}{4\pi r^3} (3 \cos \theta \hat{r} - \hat{y})$$

Находить модуль этого вектора можно по-разному, например, удобно ввести дополнительный единичный вектор:

$$\hat{\theta} = -\sin \theta \cdot \hat{y} + \cos \theta \cdot \hat{x}, \hat{r} = \cos \theta \cdot \hat{y} + \sin \theta \cdot \hat{x}$$

Или иначе:

$$\hat{y} = \cos \theta \cdot \hat{r} - \sin \theta \cdot \hat{\theta}, \hat{x} = \sin \theta \cdot \hat{r} + \cos \theta \cdot \hat{\theta}$$

$$3 \cos \theta \hat{r} - \hat{y} = 3 \cos \theta \hat{r} - (\cos \theta \cdot \hat{r} - \sin \theta \cdot \hat{\theta}) \Rightarrow$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} ((2 \cos \theta) \hat{r} + (\sin \theta) \hat{\theta}) \Rightarrow B = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} \sqrt{(2 \cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2}$$

B1 1.50 Выразите магнитное поле $B(y)$ вдоль оси, перпендикулярной магниту, на расстоянии y от центра.

Для нахождения ответа в этом пункте, разобьём магнит на бесконечно узкие кольца и проинтегрируем:

Получаем слеующее выражение:

$$\vec{B}(y) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_0^R 2\pi x \cdot dx \cdot \sigma \cdot \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot (2 \cos \theta \cdot \cos \theta \cdot \hat{y} + \sin \theta \cdot \sin \theta \cdot (-\hat{y}))$$

Для удобства перейдём к интегрированию по углу:

$$R = y \cdot \tan \theta_{max}, x = y \cdot \tan \theta, dx = y \cdot \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}, \frac{y}{\cos \theta} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Тогда

$$B = \frac{\mu_0 \sigma}{2} \cdot \int_0^{\theta_{max}} y \cdot \tan \theta \cdot y \cdot \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \cdot \frac{\cos^3 \theta}{y^3} \cdot \hat{y} \cdot (2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

$$= \frac{\mu_0 \sigma \cdot \hat{y}}{2y} \cdot \int_0^{\theta_{max}} d\theta \cdot (2 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta)$$

$$= \frac{\mu_0 \sigma \cdot \hat{y}}{2y} \cdot \int_0^{\theta_{max}} d\theta \cdot (3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin \theta)$$

$$= \frac{\mu_0 \sigma \cdot \hat{y}}{2y} \cdot [-\cos^3 \theta + \cos \theta] \Big|_0^{\theta_{max}} = \frac{\mu_0 \sigma \cdot \hat{y}}{2y} \cdot [\cos \theta_{max} - \cos^3 \theta_{max}]$$

$$\cos \theta_{max} = \frac{y}{\sqrt{R^2 + y^2}}$$

Упрощая, получаем итоговый результат:

$$B(y) = \frac{\mu_0 \sigma}{2} \cdot \frac{R^2}{(R^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

B2 0.50 Оцените величину магнитного поля вблизи поверхности магнита. Ответ выразите через величины t , D , ρ , μ_0 .

Поскольку выполняется соотношение $t \ll D$, магнит можно считать плоским и пренебрегать его толщиной при нахождении поля у поверхности:

$$\sigma = \rho \cdot t, B(y) = \frac{\mu_0 \sigma}{2} \cdot \frac{R^2}{(R^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}, y = 0 \Rightarrow B_0 = \frac{\mu_0 \rho t}{D}$$

$$\frac{\mu_0 \rho t}{D} = 0.13 \text{Тл}$$

B3 0.50 Получите выражение и численное значение силы взаимодействия F_0 между дверью и прижатым к ней магнитом, также вычислите давление P_0 магнита на дверь.

В3) По условию, объемная плотность энергии магнитного поля составляет:

$$\frac{E}{V} = \frac{1}{2\mu_0} \cdot B^2$$

При отрыве магнита от двери на небольшое расстояние y :

$$\Delta E = \pi(D/2)^2 \cdot y \cdot \frac{1}{2\mu_0} \cdot B_0^2$$

$$F = \frac{\Delta E}{y} = \pi(D/2)^2 \cdot \frac{1}{2\mu_0} \cdot B_0^2 = 2.2H$$

Зная силу и площадь соприкосновения, легко выразить давление:

$$P = \frac{F}{S} = \frac{B_0^2}{2\mu_0} = 6.9 \cdot 10^3 \text{ Па}$$

С1 ^{2.00}

Запишите выражение для поля $\vec{B}(\vec{r}_0, y)$ которое создает ряд магнитов. (Для удобства поле выражается и через $\vec{r}_0$, и через y , хотя технически $y = (\vec{r}_0)_y$.)

По схеме ниже:

$$r_0 = \frac{y}{\cos \alpha}, x = y \tan \alpha, \vec{r_0} = y\hat{y} + x\hat{x} \Rightarrow r_0 = \hat{y} \cdot \cos \alpha + \hat{x} \cdot \sin \alpha$$

$$\frac{r_0}{r} = \cos \theta, z = r_0 \tan \theta \Rightarrow dz = \frac{r_0 d\theta}{\cos^2 \theta}$$

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + (-z)\hat{z}$$

$$\vec{B}(\vec{r_0}, y) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dz \cdot \rho_L \cdot [\frac{3}{r^4}(\frac{y \cdot \cos \theta}{r_0}) \cdot (\vec{r_0} - z\hat{z}) - \frac{\hat{y}}{r^3}] =$$

$$\frac{\mu_0 \cdot \rho_L}{4\pi} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \cdot \frac{r_0}{\cos^2 \theta} \cdot [\frac{3y}{r_0^5} \cdot \cos^5 \theta \cdot \vec{r_0} - \frac{\hat{y}}{r_0^3} \cdot \cos^3 \theta] =$$

$$\frac{\mu_0 \cdot \rho_L}{4\pi r_0^2} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \cdot [\frac{3y \cdot \vec{r_0}}{r_0^2} \cdot \cos^3 \theta - \hat{y} \cdot \cos \theta] =$$

$$\frac{\mu_0 \cdot \rho_L}{4\pi r_0^2} \cdot [\frac{3y \cdot \vec{r_0}}{r_0^2} \cdot (\sin \theta - \frac{1}{3}\sin^3 \theta) - \hat{y} \cdot \sin \theta]|_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$

$$\frac{\mu_0 \cdot \rho_L}{4\pi r_0^2} \cdot [\frac{4y \cdot \vec{r_0}}{r_0^2} - 2\hat{y}]$$

С2 ^{1.00}

Найдите магнитного поля с двух сторон от сборки. Ответ дать в виде некоторого интеграла.

По схеме ниже:

$$r_0 = \frac{y_0}{\cos \alpha} = \frac{y}{\cos(\beta + \alpha)} \Rightarrow y = y_0 \cdot \frac{\cos(\beta + \alpha)}{\cos \alpha}$$

$$\hat{y} = \cos \beta \cdot \hat{y_0} + \sin \beta \cdot \hat{x}, \hat{r_0} = \cos \alpha \cdot \hat{y_0} - \sin \alpha \cdot \hat{x}$$

$$\vec{B} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot \frac{\mu_0 \sigma}{4\pi y_0^2} \cdot \cos^2 \alpha \cdot [4 \cos(\beta + \alpha)[\cos \alpha \cdot \hat{y_0} - \sin \alpha \cdot \hat{x}] - 2[\cos \beta \cdot \hat{y_0} + \sin \beta \cdot \hat{x}]]$$

Путём несложных математических преобразований получаем:

$$\frac{\mu_0 \sigma}{2\pi y_0} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\alpha \cdot [\hat{y_0} \cdot \cos(\beta + 2\alpha) - \hat{x} \cdot \sin(\beta + 2\alpha)]$$

Подставим зависимость для β :

$$\beta = \beta_0 + kx_0 + ky_0 \cdot \tan \alpha$$

Получаем:

$$\frac{\mu_0 \sigma}{2\pi y_0} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\alpha \cdot [\hat{y_0} \cdot \cos(\beta_0 + kx_0 + ky_0 \cdot \tan \alpha + 2\alpha) - \hat{x} \cdot \sin(\beta_0 + kx_0 + ky_0 \cdot \tan \alpha + 2\alpha)]$$

С3 ^{1.00}

Покажите, что с одной стороны идеальной сборки магнитное поле стремится к нулю.

Посмотрим внимательно на полученное выражение:

$$\cos(\beta_0 + kx_0 + ky_0 \cdot \tan \alpha + 2\alpha)$$

$$= \cos(ky_0 \cdot \tan \alpha + 2\alpha) - \sin(\beta_0 + kx_0) \sin(ky_0 \cdot \tan \alpha + 2\alpha)$$

$$\cos(ky_0 \cdot \tan \alpha + 2\alpha) = \cos(ky_0 \cdot \tan \alpha) \cos(2\alpha) - \sin(ky_0 \cdot \tan \alpha) \sin(2\alpha)$$

По условию,

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx \cdot \cos(2x) \cos(c \cdot \tan x) = \frac{c \cdot \pi}{e^c} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx \cdot \sin(2x) \cdot \sin(c \cdot \tan x)$$

Несложно заметить, что это и есть наш интеграл, если взять в качестве c величину ky_0 .

C4^{1.00} Запишите выражение для поля с другой стороны.

При переходе к другой стороне сборки, некоторые знаки в уравнении меняются на противоположные:

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0\sigma}{2\pi y_0} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\alpha \cdot [\hat{y}_0 \cdot [\cos(\beta_0 + kx_0) \cdot \cos(-ky_0 \cdot \tan \alpha + 2\alpha) - \sin \dots \sin \dots]] - \hat{x} \cdot [\sin(\beta_0 + kx_0) \cos(-ky_0 \cdot \tan \alpha + 2\alpha) + \cos \dots \sin \dots]]$$

Интегралы от нечётных функций будут зануляться из-за соображений симметрии, чётные функции остаются.

$$\begin{aligned} \vec{B} &= -\frac{\mu_0\sigma}{2\pi y_0} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\alpha \cdot [\hat{y}_0 \cdot [\cos(\beta_0 + kx_0 - ky_0 \cdot \tan \alpha + 2\alpha)] - \hat{x} \cdot [\sin(\beta_0 + kx_0) \cos(-ky_0 \cdot \tan \alpha + 2\alpha) + \cos \dots \sin \dots]] \\ &= -\frac{\mu_0\sigma}{2\pi y_0} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\alpha \cdot [\hat{y}_0 \cdot \cos(\beta_0 + kx_0) \cdot (\cos(2\alpha) \cos(ky_0 \cdot \tan \alpha) + \sin \dots \sin \dots)] - \hat{x} \cdot [\sin(\beta_0 + kx_0) \cdot \dots]] \\ &= -\frac{\mu_0\sigma}{2\pi y_0} \cdot [\hat{y}_0 \cdot \cos(\beta_0 + kx_0) - \hat{x} \cdot \sin(\beta_0 + kx_0)] \cdot 2 \cdot \frac{ky_0\pi}{e^{ky_0}} \\ &= -\mu_0\sigma k \cdot e^{-ky_0} \cdot [\hat{y}_0 \cdot \cos(\beta_0 + kx_0) - \hat{x} \cdot \sin(\beta_0 + kx_0)] \end{aligned}$$

C5^{1.50} На основании выражения поля найдите среднее давление Р такого магнита на дверь холодильника. Возьмите следующие параметры: толщина $t = 0.5$ мм, объемная плотность магнитного диполя $\rho = 2 \cdot 10^5 \frac{\text{Тл} \cdot \text{м}}{\text{Гн}}$, шаг сборки $\lambda = 5$ мм.

Сила и давление находятся так же, как и в пункте В3:

$$y_0 \rightarrow 0 \Rightarrow \vec{B} = -\mu_0\sigma k \cdot [\hat{y}_0 \cdot \cos(\beta_0 + kx_0) - \hat{x} \cdot \sin(\beta_0 + kx_0)] \Rightarrow$$

$$B^2 = (\mu_0\sigma k)^2, P = \frac{1}{2\mu_0} \cdot B^2, \sigma = \rho t \Rightarrow$$

$$B = (1.257 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}) \cdot (2 \cdot 10^5 \text{ Тл} \cdot \text{м/Гн}) \cdot (5 \cdot 10^{-4} \text{ м}) \cdot \frac{2 \cdot 3.14}{5 \cdot 10^{-3} \text{ м}} = 0.16 \text{ Тл}$$

$$P = \frac{1}{2\mu_0} \cdot B^2 = \frac{1}{2 \cdot 1.257 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}} \cdot (0.16 \text{ Тл}^2) = 10 \text{ кПа}$$

C6^{0.50} Найдите соотношение между давлением, которое создает магнитная сборка Халбаха и давлением, которое создает обычный магнит из того же материала, с теми же радиусом и толщиной. Здесь тоже следует пренебречь эффектами на периметре кружка и и толщиной магнита.

По формулам, полученным ранее:

$$\eta = \frac{P}{P_0} = \left(\frac{B}{B_0}\right)^2 \left(\frac{\mu_0 \rho t k}{\mu_0 \rho t / 2R}\right)^2 = \left(\frac{4\pi R}{\lambda}\right)^2$$