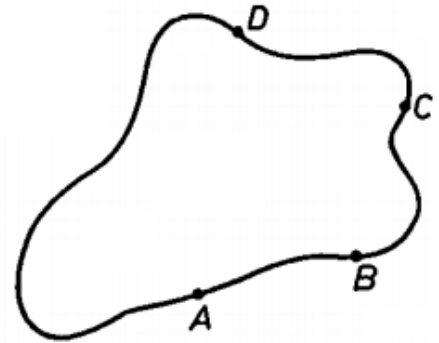


Road to IPhO

Полупроводниковые пластины

Часть А. Метод ван дер Пау (6 баллов)

Определение удельного сопротивления плоских объектов представляет собой важную практическую задачу. Т.к. форма объектов произвольна, рассчитать линии тока в них сложно. В 1958 году Лео ван дер Пау решил эту задачу для пластин произвольной геометрической формы. К центральной части боковой поверхности пластины толщины d подключают 4 контакта A , B , C и D (см.рис). Сначала через узлы A и B пропускают ток I_{AB} и измеряют напряжение U_{CD} между узлами C и D . Сопротивление $R_{AB,CD}$ рассчитывают как $\frac{U_{CD}}{I_{AB}}$. Затем через узлы B и C пропускают ток I_{BC} и измеряют напряжение U_{DA} между узлами D и A . Сопротивление $R_{BC,DA}$ рассчитывают как $\frac{U_{DA}}{I_{BC}}$.



Теоретически можно показать, что удельное сопротивление материала рассчитывается по следующей формуле

$$\rho = \frac{\pi d}{\ln 2} (R_{AB,CD} + R_{BC,DA}) \frac{f\left(\frac{R_{AB,CD}}{R_{BC,DA}}\right)}{2},$$

где f — некая функция, которая не выражается аналитически. В этой задаче вам предстоит численно найти значения этой функции в нескольких точках, а затем вычислить удельное сопротивление пластины.

Обозначим $y = \frac{R_{AB,CD}}{R_{BC,DA}}$, тогда выражение для удельного сопротивления принимает вид

$$\rho = \frac{\pi d}{\ln 2} R_{BC,DA} (y + 1) \frac{f(y)}{2}$$

Из теоретических выкладок можно получить, что функция $f(y)$ удовлетворяет соотношению

$$\frac{y-1}{y+1} = \frac{f(y)}{\ln 2} \operatorname{arch} \left(\frac{1}{2} \exp \left(\frac{\ln 2}{f(y)} \right) \right)$$

Для удобства обозначив $x = \frac{\ln 2}{f(y)}$, можно получить равносильную систему уравнений для нахождения удельного сопротивления, которой и нужно пользоваться при дальнейшем решении задачи

$$\rho = \pi d R_{BC,DA} (y + 1) \frac{1}{2x},$$

$$\frac{y-1}{y+1} = \frac{1}{x} \operatorname{arch} \left(\frac{e^x}{2} \right).$$

Примечание: Гиперболические и обратные гиперболические функции задаются следующими формулами:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad \operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

A1 Получите значения I_{AB} , U_{CD} , I_{DA} и U_{BC} для 15 различных подключений к пластине.

0.0

A2 Вычислите $R_{AB,CD}$, $R_{BC,DA}$ и y для каждого из подключений. Значения всех величин округлите с точностью до 4 значащих цифр.

0.9

Road to IPhO

A3 Формулу $\frac{y-1}{y+1} = \frac{1}{x} \operatorname{arch} \left(\frac{e^x}{2} \right)$ можно преобразовать к виду $e^x = e^{\alpha x} + e^{\beta x}$. Найдите α и β . Ответ выразите через y . **0.1**

A4 Уравнение $e^x = e^{\alpha x} + e^{\beta x}$ трансцендентное, и не может быть решено аналитически. Решите его численно, т.е. для каждого y найдите e^x (с точностью до 4 значащих цифр). **3.0**

A5 Построив график в подходящих координатах, определите численное значение ρ полупроводника. Ответ округлите до 3 значащих цифр. Толщину материала примите равной $d = 1$ мм. **2.0**

Часть В. Примесный полупроводник (4 балла)

Полупроводники бывают двух типов — собственные и примесные. Критерий их разделения следующий: если в собственных полупроводниках проводимость осуществляется в первую очередь за счет движения собственных электронов, то в примесном полупроводнике на проводимость влияют атомы примеси.

В этой части задачи рассматривается полупроводник n -типа, в котором на проводимость влияют доноры. В зависимости от температуры полупроводника, доноры могут являться как основным, так и слабым источником проводимости.

При повышении температуры в полупроводнике протекают процессы ионизации доноров и перехода собственных электронов из валентной зоны в зону проводимости. При низких температурах $kT \ll E_d$, (E_d — энергия ионизации донора), и переходом электронов в зону проводимости можно пренебречь. Поэтому основным источником проводимости являются ионизированные доноры. Зависимость концентрации ионизированных доноров в таком режиме следующая

$$n = C_1 T^{3/4} \exp \left(-\frac{E_d}{2kT} \right)$$

Процесс перехода от низких температур к высоким сопровождается областью истощения, когда практически все атомы примеси ионизируются, а концентрация свободных носителей заряда остается постоянной в широком диапазоне температур. Температура перехода в область истощения называется T_i .

В области высоких температур собственные электроны приобретают достаточную энергию для перехода в зону проводимости, и концентрация свободных электронов начинает резко возрастать. В этой области температур, называемой областью собственной проводимости, основной вклад в проводимость вносят собственные электроны. Температура перехода в область собственной проводимости обозначается T_s . Концентрация свободных электронов в области собственной проводимости зависит от температуры по следующему закону

$$n = C_2 T^{3/2} \exp \left(-\frac{\Delta E_g}{2kT} \right),$$

где ΔE_g — ширина запрещенной зоны.

B1 Снимите зависимость $n(T)$. **0.0**

B2 Постройте график зависимости $\ln n \left(\frac{1}{T} \right)$. Аппроксимируйте три участка данного графика прямыми линиями и определите значения T_i и T_s . Оцените погрешность полученных величин. **1.6**

B3 Найдите E_d . **1.2**

B4 Найдите ΔE_g . **1.2**