

Поскольку нам известны изменения температур в каждом из политропных процессов, для нахождения работы газа в цикле и КПД цикла нам необходимо найти теплоёмкости в процессах 13 и 23. Найдём теплоёмкость газа в зависимости от показателя политропы

$$n = \frac{C_P - C}{C_V - C}$$

Выражение для теплоёмкости

$$C = C_V + \frac{R}{1 - n}$$

Таким образом,задача сводится к поиску показателей политроп 13 и 23.Далее можно действовать разными способами, в решении мы предложим наиболее быстрый.

1 из способов связан с энтропией.Из определения энтропии $dS = \frac{\delta Q}{T} = C d \ln(\frac{T}{T_0})$. Значит, в политропном процессе график $S(\ln(\frac{T}{T_0}))$ линеен и имеет угловой коэффициент равный C .

Приравнивая изменение энтропии в процессе 12 к изменению энтропии в процессах 13 и 32, получим

$$C_{13} \ln(\frac{T_3}{T_1}) + C_{32} \ln(\frac{T_2}{T_3}) = C_P \ln(\frac{T_2}{T_1})$$

Учитывая соотношение $T_3^2 = T_1 T_2$ из условия, получаем эквивалентное равенство

$$C_{13} + C_{32} = 2C_P$$

Принимая во внимание зависимость $C(n)$, получаем второе уравнение для определения показателей политропы

$$\frac{1}{1 - n_{13}} + \frac{1}{1 - n_{23}} = 2$$

Учитывая, что $n_{23} = -\frac{1}{n_{13}}$, получим квадратное уравнение относительно n_{13}

$$n_{13}^2 + 2n_{13} - 1 = 0$$

Решая квадратное уравнение, получаем

$$n_{13} = -1 \pm \sqrt{2}$$

Смысл двух корней не только в том, что мы имеем 2 неизвестных показателя политропы, но ещё и в том, что возможно провести 2 разных цикла, меняя направление изобарного процесса.Действительно,если построить качественный график $P(V)$, станет ясно, что политропы с показателями разного знака могут иметь в точке пересечения давление как выше,так и ниже давления в изобарном процессе.

Теперь найдём значения теплоёмкостей для данных показателей политроп

1)Для $n = -1 + \sqrt{2}$

$$C_1 = C_V + \frac{R}{2 - \sqrt{2}} = C_P + \frac{R}{\sqrt{2}}$$

2)Для $n = -1 - \sqrt{2}$

$$C_2 = C_V + \frac{R}{2 + \sqrt{2}} = C_P - \frac{R}{\sqrt{2}}$$

В случае, если давление в точке 3 выше, чем в изобарном процессе, $C_{13} = C_2, C_{32} = C_1$,а в ином случае наоборот.Работу газа в циклах найдём из закона сохранения энергии

В 1 случае

$$A_1 = C_2(T_3 - T_1) + C_1(T_2 - T_3) - C_P(T_2 - T_1) = \frac{R}{\sqrt{2}} \cdot (\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1})^2 = 587,6 \text{ Дж}$$

Во втором случае

$$A_2 = C_P(T_2 - T_1) - C_2(T_2 - T_3) - C_1(T_3 - T_1) = \frac{R}{\sqrt{2}} \cdot (\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1})^2 = 587,6 \text{ Дж}$$

Выражения для работы одинаковы в обоих случаях

A2 1.50

 Найдите КПД η цикла.

Поскольку работу газа в цикле мы уже знаем, необходимо определить Q_+ для нахождения КПД цикла.

В первом случае тепло отводится только на изобаре, поэтому из закона сохранения энергии

$$Q_{+1} = C_P(T_2 - T_1) + A$$

Во втором случае тепло подводится только на изобаре, поэтому

$$Q_{+2} = C_P(T_2 - T_1)$$

Выражения для КПД циклов, соответственно

$$\eta_1 = \frac{1}{\frac{C_P \sqrt{2}}{R} \frac{(\sqrt{T_2} + \sqrt{T_1})}{(\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1})} + 1}$$

$$\eta_2 = \frac{1}{\frac{C_P \sqrt{2}}{R} \frac{(\sqrt{T_2} + \sqrt{T_1})}{(\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1})}}$$

Учитывая, что $C_P = \frac{\gamma}{\gamma - 1} R$, ответы приводятся к следующему виду

$$\eta_1 = \frac{1}{\frac{\gamma \sqrt{2}}{\gamma - 1} \frac{(\sqrt{T_2} + \sqrt{T_1})}{(\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1})} + 1} = \frac{1}{9\sqrt{2} + 1}$$

$$\eta_2 = \frac{1}{\frac{\gamma \sqrt{2}}{\gamma - 1} \frac{(\sqrt{T_2} + \sqrt{T_1})}{(\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1})}} = \frac{1}{9\sqrt{2}}$$