

A1 ^{0.50} Система имеет одну степень свободы, угол φ , и положение маятника можно описать функцией этого угла. Выразите декартовы координаты тела $x(t)$ и $y(t)$ как функции угла $\varphi(t)$ и времени.

Ответ:

$$x(t) = l \sin \varphi$$

$$y(t) = a \cos \omega t - l \cos \varphi$$

A2 ^{0.50} Найдите компоненты скорости v_x и v_y тела. Ответ выразите через угловую скорость $\frac{d\varphi}{dt}$ и время.

Ответ:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = l \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = l \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} - \omega a \sin \omega t$$

A3 ^{0.50} Найдите кинетическую и энергию тела. Ответ выразите через угол φ , угловую скорость $\frac{d\varphi}{dt}$ и время.

$$E_k = \frac{m}{2} \left(\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right)$$

Ответ:

$$E_k = \frac{m}{2} \left(\left(l \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \left(\omega a \sin \omega t \right)^2 - 2\omega a l \sin \omega t \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} \right)$$

A4 ^{1.00} Получите выражение для мгновенной мощности N силы, прикладываемой к точке подвеса маятника. Ответ выразите через $m, g, l, a, \omega, \varphi, \frac{d\varphi}{dt}, \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ и время.

Обозначим точку подвеса маятника за o . Тогда выражение для мощности принимает вид

$$N = \vec{F}_o \vec{v}_o = F_{oy} \frac{dy_o}{dt}$$

Из закона изменения импульса для тела

$$F_{oy} = mg + m \frac{d^2 y}{dt^2}$$

$$\frac{dy_o}{dt} = -\omega a \sin \omega t$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\omega^2 a \cos \omega t + l \left(\sin \varphi \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \cos \varphi \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right)$$

Окончательный ответ

Ответ:

$$N = -m\omega a \sin \omega t \left(g - \omega^2 a \cos \omega t + l \left(\sin \varphi \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \cos \varphi \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right) \right)$$

A5 ^{1.00} Покажите, что уравнение движения выглядит следующим образом:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{1}{l} (g - a \omega^2 \cos \omega t) \sin \varphi.$$

Наиболее простой способ показать справедливость данного соотношения связан с переходом в неинерциальную систему отсчёта, связанную с точкой подвеса . В ней на тело помимо силы реакции стержня и силы тяжести действует вертикальная сила инерции, равная $F_{iy} = -m \frac{d^2 y_o}{dt^2} = m\omega^2 a \cos \omega t$.

Из закона изменения момента импульса относительно точки подвеса имеем

$$ml^2 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = (F_{iy} - mg)l \sin \varphi$$

Из записанных уравнений получается требуемое соотношение

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{1}{l}(g - a \omega^2 \cos \omega t) \sin \varphi.$$

Ответить на вопрос можно и более формально,продифференцировав закон изменения механической энергии тела в неподвижной системе отсчёта

$$N = \frac{dE}{dt} = mgl \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} + m \frac{dy}{dt} \frac{d^2 y}{dt^2} + m \frac{dx}{dt} \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = l \left(\cos \varphi \frac{d^2 \varphi}{dt^2} - \sin \varphi \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right)$$

После постановки всех величин, полученных ранее, получаем требуемое соотношение.

B1^{1.00} Покажите, что выражение для быстрой компоненты $\beta = -\frac{a}{l} \sin \gamma \cos \omega t$ (для произвольного значения γ) является приближенным решением уравнения движения из пункта A5 при указанных выше условиях. Рассмотрите режим колебаний, в котором g пренебрежимо мал по сравнению с $a\omega^2$, т.е. $a\omega^2 \gg g$.

Поскольку β – быстрая компонента

$$\frac{d^2 \beta}{dt^2} = \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$$

$$\frac{d^2 \beta}{dt^2} = -\frac{1}{l}(g - a \omega^2 \cos \omega t) \sin(\gamma + \beta)$$

Поскольку $\beta \ll \gamma$ и $g \ll a\omega^2$, уравнение приобретает следующий вид:

$$\frac{d^2 \beta}{dt^2} = \frac{\omega^2 a}{l} \sin \gamma \cos \omega t = -\omega^2 A \cos(\omega t)$$

где

$$A = -\frac{a}{l} \sin \gamma$$

Из этого выражения для второй производной $\frac{d^2 \beta}{dt^2}$ интегрированием получаем выражение для β :

$$\beta(t) = A \cos(\omega t) = -\frac{a}{l} \sin \gamma \cos \omega t$$

B2^{2.50} Комбинируя уравнение движения из пункта A5 с разложением $\varphi = \gamma + \beta$ и с выражением из предыдущего пункта, найдите выражение для $\frac{d^2 \gamma}{dt^2}$, которое описывает динамику медленной компоненты γ усредняя по большому количеству быстрых колебаний с частотой ω , пренебрегая только членами порядка a^n , где $n > 2$. Выразите $\frac{d^2 \gamma}{dt^2}$ через g, a, ω, l и γ . Упростите окончательное выражение, считая $l\omega^2 \gg a\omega^2 \gg g$.

Для усреднения по большому числу быстрых колебаний

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{d^2 \gamma}{dt^2}$$

$$\frac{d^2 \gamma}{dt^2} = -\frac{1}{lt} \int_0^t (g - a\omega^2 \cos \omega t) \sin \varphi \left(\sin \gamma \cos \beta + \cos \gamma \sin \beta \right) dt$$

Для пренебрежения всеми членами порядка выше a^2 достаточно следующих разложений

$$\sin \beta = \beta \text{ и } \cos \beta = 1 - \frac{\beta^2}{2}$$

Выражение после разложений и раскрытия скобок принимает вид

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} = -\frac{1}{lt} \int_0^t \left(g \sin \gamma \left(1 - \frac{a^2 \sin \gamma}{l^2} \cos^2 \omega t \right) + a\omega^2 \left(\frac{a^2 \sin^2 \gamma}{2l^2} \cos^3 \omega t + \frac{a \sin 2\gamma}{2l} \cos^2 \omega t \right) \right) dt$$

При интегрировании учтём малость $\frac{a^2}{l^2}$, а также что при большом времени усреднения средние значения тригонометрических функций в нечётных степенях равны нулю,это позволяет сразу отбросить большинство слагаемых.

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} = -\frac{1}{lt} \int_0^t \left(g \sin \gamma + \frac{a^2\omega^2 \sin 2\gamma}{4l} (1 + \cos 2\omega t) \right) dt$$

Получаем ответ

Ответ:

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} = -\frac{1}{l} \left(g \sin \gamma + \frac{a^2\omega^2 \sin 2\gamma}{4l} \right)$$

В3 ^{0.70}

Получите выражение для усредненного по времени момента всех сил M_O , действующих на маятник относительно точки подвеса. Ответ выразите через m, g, l, a, ω и γ .

Возвращаясь к пункту A5

$$ml^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M$$

Учитывая,что при усреднении за большой промежуток времени

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d^2\gamma}{dt^2}$$

среднее по времени значение момента всех сил

Ответ:

$$M_o = -ml \left(g \sin \gamma + \frac{a^2\omega^2 \sin 2\gamma}{4l} \right)$$

В4 ^{0.70}

Назовем эффективным потенциалом скалярную функцию $V(\gamma)$, производная которой по углу γ равняется усредненному моменту сил из предыдущего пункта, взятому со знаком минус. Получите выражение для эффективного потенциала $V(\gamma)$ с точностью до произвольной постоянной. Ответ выразите через m, g, l, a, ω и γ .

Проинтегрируем средний момент M_o по углу γ

$$V(\gamma) = ml \int \left(g \sin \gamma + \frac{a^2\omega^2 \sin 2\gamma}{4l} \right) d\gamma$$

Ответ:

$$V(\gamma) = -mgl \cos \gamma - \frac{ma^2\omega^2 \cos^2 \gamma}{4} + C$$

В5 ^{1.00}

Покажите, что для $(a\omega)^2 > 2gl$ этот потенциал имеет несколько минимумов: минимум при $\gamma = 0$, который появляется в случае свободных колебаний маятника; дополнительный минимум $\gamma = \pi$. Покажите, что оба положения удовлетворяют условиям устойчивого равновесия.

Полученная зависимость представляет собой параболу относительно $\cos \gamma$,максимум которой достигается при

$$\cos \gamma = -\frac{b}{2a} = -\frac{2gl}{(a\omega)^2}$$

Существование двух корней возможно лишь в случае,если $\cos \gamma > -1$ в вершине параболы,откуда сразу вытекает требуемое неравенство

$$(a\omega)^2 > 2gl$$

Условиями устойчивого равновесия являются

$$1) \frac{dV}{d\gamma} = M_o = 0$$

$$2) \frac{d^2V}{d\gamma^2} > 0$$

Найдём первую производную

$$\frac{dV}{d\gamma} = ml\Big(g \sin \gamma + \frac{a^2\omega^2 \sin 2\gamma}{4l}\Big)$$

При $\gamma = 0; \pi$ $\frac{dV}{d\gamma}$ равна нулю

Найдём вторую производную

$$\frac{d^2V}{d\gamma^2} = ml\Big(g \cos \gamma + \frac{a^2\omega^2 \cos 2\gamma}{2l}\Big)$$

При $\gamma = 0$

$$\frac{d^2V}{d\gamma^2} = ml\Big(g + \frac{a^2\omega^2}{2l}\Big)$$

При $\gamma = \pi$

$$\frac{d^2V}{d\gamma^2} = ml\Big(-g + \frac{a^2\omega^2}{2l}\Big)$$

Последнее выражение положительно при условии,которое мы доказали в начале пункта. Таким образом,оба положения удовлетворяют условиям устойчивого равновесия.

В6 ^{0.60}

Найдите периоды колебаний T_0 и T_π величины γ , соответствующие положениям из пункта В5.

Уравнение колебаний для $\gamma = 0$

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} = -\frac{\gamma}{l}\Big(g + \frac{a^2\omega^2}{2l}\Big)$$

Уравнение колебаний для $\gamma = \pi$

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} = -\frac{(\gamma - \pi)}{l}\Big(-g + \frac{a^2\omega^2}{2l}\Big)$$

Ответ:

$$T_o = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{a^2\omega^2}{2l^2}}}$$

$$T_\pi = \frac{2\pi}{\sqrt{-\frac{g}{l} + \frac{a^2\omega^2}{2l^2}}}$$