

A1 ^{0.40} Рассмотрим твердое тело, движущееся поступательно со скоростью $\vec{v}_0$ в жидкости. Перейдем в систему отсчета, в которой тело покоится. Чему равна нормальная составляющая скорости к поверхности твердого тела v_n ? Чему равна скорость жидкости на бесконечном удалении от тела $\vec{v}_\infty$ в системе отсчета связанной с телом? Запишите ответы в таблицу в начале листа ответов.

Циркуляция вектора скорости жидкости, как мы уже сказали, равняется нулю.
Поток вектора скорости жидкости тоже равняется нулю, поскольку жидкость несжимаема.
Поскольку твёрдое тело неподвижно, на поверхности составляющая скорости, перпендикулярная к поверхности тела равняется нулю.
На больших удалениях от тела оно слабо влияет на изменение скорости жидкости, поэтому скорость стремится к $-\vec{v}_0$

A2 ^{0.40} Рассмотрим неподвижное сверхпроводящее тело, помещенное в однородное поле с индукцией $\vec{B}_0$. Геометрические размеры тела и его ориентация по отношению к вектору $\vec{B}_0$ совпадают с размерами тела и ориентацией тела по отношению к вектору $\vec{v}_0$ из пункта **A1**. Чему равна нормальная составляющая индукции магнитного поля B_n ? Чему равна индукция магнитного поля $\vec{B}_\infty$ на бесконечном удалении от сверхпроводника? Запишите ответы в таблицу в начале листа ответов.

Поскольку в пространстве вне сверхпроводника отсутствуют токи, циркуляция магнитного поля в этой области равна нулю.
Из теоремы Гаусса для магнитного поля поток напряжённости магнитного поля также равен нулю.
В объёме сверхпроводника магнитное поле равняется нулю. Из теоремы Гаусса следует, что нормальная составляющая магнитного поля равна нулю и на поверхности сверхпроводника.
На большом удалении сверхпроводник оказывает малое влияние на индукцию магнитного поля, поэтому она стремится к величине $\vec{B}_0$

A3 ^{0.40} Пусть для пункта **A2** во всем пространстве задано распределение индукции магнитного поля $\vec{B}=f(\vec{B}_0, \vec{r})$. Считая, что вектора $\vec{B}_0$ и $\vec{v}_0$ сонаправлены, найдите распределение скорости жидкости в пространстве в системе отсчета связанной с телом.

Как мы видим из результатов пунктов **A1** и **A2**, с точки зрения математики постановки задачи о распределении скоростей в пункте **A1** и распределении индукции магнитного поля в **A2** полностью эквивалентны с точностью до замены $\vec{v}_0$ на $-\vec{B}_0$.
Поэтому

$$\vec{v} = -\frac{v_0}{B_0} f(\vec{B}_0 \vec{r})$$

B1 ^{1.80} Поместим сверхпроводящий шар радиуса R в однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}_0$. Найдите индукцию магнитного поля во всем пространстве вне шара. Ответ выразите через $\vec{B}_0$, $\vec{r}$ и R .

Известно, что поле сверхпроводящего шара, помещённого в однородное магнитное поле совпадает с полем магнитного диполя. Выражение для суммарного магнитного поля принимает вид

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{m}\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right)$$

где m - магнитный момент.

Из условия нулевой нормальной составляющей магнитного поля на поверхности шара получим

$$(\vec{B}\vec{r}) = (\vec{B}_0\vec{r}) + \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{(\vec{m}\vec{r})}{R^4} = 0$$

Из последнего соотношения находим магнитный момент шара

$$\vec{m} = -\frac{2\pi R^3}{\mu_0} \vec{B}_0$$

После нахождения магнитного момента выражение для магнитного поля принимает вид

$$\vec{B} = \vec{B}_0 - \frac{3R^3(\vec{B}_0\vec{r})\vec{r}}{2r^5} + \frac{\vec{B}_0 R^3}{2r^3}$$

B2 ^{0.50} Найдите скорость жидкости во всем пространстве вне шара. Ответ выразите через $\vec{v}$, $\vec{r}$ и R .

Перейдём в систему отсчёта, в которой шар покоится. Учитывая результаты части В, получим скорость жидкости в каждой точке пространства в данной системе отсчёта

$$v_{\text{отн}}(\vec{r}) = -\vec{v} + \frac{3R^3(\vec{v}\vec{r})\vec{r}}{2r^5} - \frac{\vec{v} R^3}{2r^3}$$

Здесь мы учли, что в данном случае введённая в части В $\vec{v}_0$ представляет собой $-\vec{v}$

Мы нашли распределение скоростей относительно шара. Для распределения скоростей в неподвижной системе отсчёта к полученному выражению необходимо добавить вектор $\vec{v}$

$$\vec{v}_{\text{ж}}(r) = \frac{3R^3(\vec{v}\vec{r})\vec{r}}{2r^5} - \frac{\vec{v}R^3}{2r^3}$$

ВЗ 1.70

Найдите кинетическую энергию жидкости. Ответ выразите через v , ρ и R .

Для вычисления кинетической энергии жидкости необходимо вычислить интеграл $\int \frac{\rho v^2 dV}{2}$.

Пусть φ - угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{v}$. Выделим при данном угле сегмент с углом $d\varphi$ и толщиной dr . Объем данного элемента равен $2\pi R^2 \sin(\varphi) dr d\varphi$. Тогда

$$W_{\text{к}} = \int_R^\infty \int_0^\pi \pi R^2 \sin(\varphi) dr d\varphi v_{\text{ж}}^2(\varphi)$$

Найдём $v_{\text{ж}}^2(\varphi)$ из теоремы косинусов

$$v_{\text{ж}}^2(\varphi) = \frac{v^2 (1 + 3 \cos^2(\varphi)) R^6}{4r^6}$$

Комбинация последнего выражения и уже полученного интеграла даёт

$$W_k = \frac{\pi \rho v^2 R^6}{4} \int_R^\infty \frac{dr}{r^4} \int_0^\pi \sin(\varphi) (1 + 3 \cos^2(\varphi)) d\varphi$$

$$\int_R^\infty \frac{dr}{r^4} = \frac{1}{3R^3}$$

$$\int_0^\pi \sin(\varphi) (1 + 3 \cos^2(\varphi)) d\varphi = \int_1^{-1} -(d \cos(\varphi) + 3 \cos^2(\varphi) d \cos(\varphi)) = 4$$

$$W_{\text{к}} = \frac{\pi \rho R^3 v^2}{3}$$

В4 0.50

Найдите значение μ для шара. Ответ выразите через ρ и R .

$$\mu_{\text{ш}} = \frac{2W_{\text{к}}}{v^2} = \frac{2\pi \rho R^3}{3}$$

С1 2.80

Поместим бесконечно длинный сверхпроводящий цилиндр радиуса R в однородное магнитное поле индукцией $\vec{B}_0$. Найдите индукцию магнитного поля во всем пространстве вне цилиндра. Ответ выразите через $\vec{B}_0$, $\vec{r}$ и R .

Поле поверхностных токов цилиндра во внутренней области должно быть однородным и равняться $-\vec{B}_0$. Это известная задача - нужно объединить два одинаковых провода с одинаковыми токами, текущими в разных направлениях в один, в области нулевых токов поле будет однородным. В пространстве вне цилиндра это его поле эквивалентно полю двух бесконечно близких параллельных проводов с токами, текущими в разных направлениях, которое, в свою очередь, эквивалентно полю бесконечной дипольной последовательности. Рассчитаем поле такой системы, используя магнитные заряды.

Введём единичный вектор магнитного момента $\vec{m}_0$. Поле магнитного диполя с моментом $\vec{m}$ имеет вид

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{m}\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right)$$

Для расчёта цепочки такой системы нам достаточно посчитать поле двух бесконечно близких заряженных нитей с единичным дипольным моментом $\vec{p}_0$. Поле провода, заряженного с линейной плотностью заряда ρ равняется

$$\vec{E} = \frac{\rho \vec{r}}{2\pi \epsilon_0 r^2}$$

Введём вектор $\vec{d}$ для определения дипольного момента. Он определится из соотношения

$$\vec{r}_- = \vec{r}_+ + \vec{d}$$

Тогда выражение для суммарного поля принимает вид

$$\vec{E} = \frac{\rho}{2\pi \epsilon_0} \left(\frac{\vec{r}_+}{r_+^2} - \frac{\vec{r}_-}{r_-^2} \right)$$

Учитывая, что $d \ll r$, получим

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{2(\vec{p}_0\vec{r})\vec{r}}{r^4} - \frac{\vec{p}_0}{r^2} \right)$$

Тогда, учитывая, что p_0 достаточно заменить на m_0 , а ϵ_0 достаточно заменить на $\frac{1}{\mu_0}$, получаем выражение для поля цилиндра

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{2(\vec{m}_0\vec{r})\vec{r}}{r^4} - \frac{\vec{m}_0}{r^2} \right)$$

Из условия нулевой нормальной составляющей магнитного поля на поверхности цилиндра получим

$$(\vec{B}\vec{r}) = (\vec{B}_0\vec{r}) + \frac{\mu_0(\vec{m}_0\vec{r})}{2\pi R^2} = 0$$

Из последнего соотношения находим $\vec{m}_0$

$$\vec{m}_0 = -\frac{2\pi R^2 \vec{B}_0}{\mu_0}$$

Выражение для суммарного магнитного поля

$$\vec{B} = \vec{B}_0 - 2\frac{(\vec{B}_0\vec{r})R^2\vec{r}}{r^4} + \frac{R^2\vec{B}_0}{r^2}$$

C2^{0.40}

Найдите скорость жидкости во всем пространстве вне цилиндра. Ответ выразите через $\vec{v}$, $\vec{r}$ и R .

Вновь, как и в части C, меняя $\vec{B}_0$ на $-\vec{v}$ и переходя в неподвижную систему отсчёта, получим

$$\vec{v}_{\text{ж}}(\vec{r}) = 2\frac{(\vec{v}\vec{r})R^2\vec{r}}{r^4} - \frac{R^2\vec{v}}{r^2}$$

C3^{0.90}

Найдите кинетическую энергию движения жидкости. Ответ выразите через ρ , R , L и v .

Из теоремы косинусов для угла φ между векторами $\vec{v}$ и $\vec{r}$ получаем

$$v_{\text{ж}}^2(\vec{r}) = \frac{v^2 R^4}{r^4}$$

Следовательно, на равных расстояниях от оси цилиндра скорости равны. Тогда

$$W_{\text{к}} = \int_R^\infty \rho \pi L v^2(\vec{r}) r dr = \rho \pi v^2 R^4 \int_R^\infty \frac{dr}{r^3}$$

$$W_{\text{к}} = \frac{\rho \pi R^2 L v^2}{2}$$

C4^{0.20}

Найдите значение присоединенную массу μ для движущегося цилиндра. Ответ выразите через ρ , R и L .

Получим ответ

$$\mu = \frac{2W_{\text{к}}}{v^2} = \rho \pi R^2 L$$