

A1 ^{1.00} Каким может быть минимальное расстояние $d_{\min}$ между электронами, чтобы описанное выше движение было возможным?

Запишем второй закон Ньютона в проекции на линию, проходящую через электроны. Поскольку расстояние не меняется, ускорение равно $\frac{v^2}{r}$. Получаем в итоге уравнение:

$$\frac{2mv^2}{d} = vBe - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d^2}$$

Решаем квадратное уравнение относительно v . Дискриминант этого уравнения равен $(Be)^2 - \frac{2me^2}{\pi\epsilon_0 d^3}$.

Из дискриминанта видно, что решения для скорости существуют только для $d \geq 2\sqrt[3]{\frac{m}{4\pi\epsilon_0 B^2}}$. Это и будет минимальное возможное расстояние.

A2 ^{0.50} Найдите скорость v_m , которую нужно сообщить электронам, чтобы при их движении между ними сохранялось найденное в A1 расстояние $d_{\min}$.

Так как дискриминант равен нулю:

$$v_m = -\frac{b}{2a} = \frac{Be}{2m}d_{\min} = \frac{e}{2}\sqrt[3]{\frac{B}{4\pi\epsilon_0 m^2}}$$

B1 ^{0.50} Найдите угловую скорость центра масс ω во время движения электронов.

Центр масс движется под действием двух сил Лоренца:

$$m\vec{a} = [\vec{v}_1 \times \vec{B}]q + [\vec{v}_2 \times \vec{B}]q = [(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \times \vec{B}]q = 2[\vec{v}_{CM} \times \vec{B}]q$$

Так как других внешних сил нет, скорость центра масс поворачивается, но не меняется по модулю. Ускорение центра масс в таком случае равно $\vec{\omega} \times \vec{v}$

$$2m[\vec{\omega}_{CM} \times \vec{v}] \equiv 2[\vec{v}_{CM} \times \vec{B}]q$$

$$\omega_{CM} = \frac{Be}{m}$$

B2 ^{1.00} Найдите время, через которое у обоих электронов сравняются абсолютные значения скорости в первый раз.

При движении, описанном в условии, кинетическая энергия сохраняется. Таким образом угловая скорость относительно центра масс не меняется.

$$\omega = \frac{v_0}{d_1}$$

Скорость центра масс и относительная скорость равны, поэтому скорости электронов сравняются, когда угол между скоростью центра масс и относительной скоростью станет равным $\frac{\pi}{2}$.

$$t = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\left| \frac{v_0}{d_1} - \frac{eB}{m} \right|}$$

C1 ^{0.20} Получите выражение для кинетической энергии одного электрона $K = K(m, v_r, \omega, r)$, где $v_r = \frac{dr}{dt}$, $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, а r и θ — задают положение электрона в системе центра масс.

$$K = \frac{m}{2}(\omega^2 r^2 + v_r^2)$$

C2 ^{0.80} Найдите, чему равна производная момента импульса по времени $\frac{dL}{dt}$ при движении электронов.

Момент импульса меняется за счет составляющей силы Лоренца, отвечающей радиальной составляющей скорости.

$$\frac{dL}{dt} = v_r Ber$$

C3 ^{0.50} Найдите интеграл движения для рассматриваемого случая, т.е. найдите такую функцию J , для которой справедливо $\frac{dJ}{dt} = 0$.

Интегрируя выражение для $\frac{dL}{dt}$ получаем интеграл движения

$$J = L - \frac{eBr^2}{2}$$

C4 ^{1.00} Выразите полную энергию электрона в виде $E = K(v_r) + U(r)$. Выразите ее через J, e, B, r и физические постоянные.

Выражаем угловую скорость через J , затем подставляем в выражение для кинетической энергии. $\omega = \frac{1}{m} \left(\frac{J}{r^2} + \frac{eB}{2} \right)$.

К кинетической энергии надо добавить энергию кулоновского взаимодействия, приходящуюся на один электрон.

$$E = \frac{mv_r^2}{2} + \frac{r^2}{2m} \left(\frac{J}{r^2} + \frac{eB}{2} \right)^2 + \frac{e^2}{16\pi\epsilon_0 r}$$

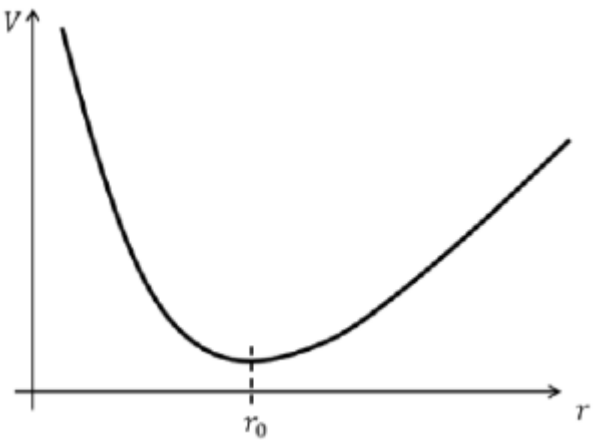
C5 ^{0.50} Схематично изобразите график зависимости $U(r)$, укажите его характерные особенности.

Пределы $U(r)$ в точках 0 и $+\infty$ равны $+\infty$, при этом функция непрерывна на отрезке $(0, +\infty)$

Вторая производная функции $U(r)$ имеет следующий вид:

$$\frac{Ar^4 + Br + C}{r^4}; \quad A, B, C, r > 0$$

На интересующем нас отрезке она всегда больше нуля, оба предела бесконечные, следовательно есть минимум, причем единственный.



C6 ^{1.00} Разложите функцию $U(r)$ в ряд Тейлора до первого нетривиального члена вблизи особых точек из пункта C5. Основываясь на разложении, схематично изобразите траекторию электронов, которым сообщили небольшую радиальную компоненту скорости v_{r0} вдобавок к скорости движения по окружности v_0 .

Так как мы будем оставаться в окрестности минимума, электроны будут совершать гармонические колебания вдоль радиуса.

