

A1 0.20 Найдите напряженность поля в центре заряженного кольца.

В центре кольца поле любого заряда направлено в его плоскости, поэтому величина поля равна нулю в силу симметрии и

A2 0.30 Найдите потенциал на оси кольца на расстоянии  $x$  от его центра.

Расстояние до зарядов на кольце равняется  $\sqrt{R^2 + x^2}$ , откуда

$$\varphi = \frac{kQ}{\sqrt{R^2 + x^2}} = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0 \sqrt{R^2 + x^2}}$$

A3 0.30 Найдите модуль напряженности поле на оси кольца на расстоянии  $x$  от его центра.

Вектор напряжённости электрического поля каждого из зарядов образует с вертикалью угол  $\alpha$  такой, что  $\cos(\alpha) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}$

Комбинируя это с законом кулона

$$E = \frac{kQx}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\lambda x R}{2\epsilon_0 (x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

A4 0.60 При каком значении  $x$  напряженность поля на оси кольца максимальна? Найдите эту максимальную напряженность.

Возьмём производную от выражения  $\frac{x}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$  и приравняем нулю

$$\frac{1}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3x^2}{(x^2 + R^2)^{\frac{5}{2}}} = 0$$

Откуда

$$x = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

Подставляя значение  $x$  в выражение для электрического поля

$$E_{max} = \frac{\lambda}{3\sqrt{3}R\epsilon_0}$$

A5 0.60 Найдите напряженность поля, создаваемого диском радиуса  $R$ , равномерно заряженного по поверхности с плотностью заряда  $\sigma$  на его оси на расстоянии  $x$  от центра.

Как известно, выражение для нормальной составляющей поля плоского слоя, равномерно заряженного по поверхности следующее

$$E_n = \frac{\sigma \Omega}{4\pi\epsilon_0}$$

где  $\Omega$  - телесный угол, под которым из данной точки виден плоский слой.

Выражение для телесного угла, под которым виден диск из точки, находящейся на его оси на расстоянии  $x$  от центра следующее

$$\Omega = 2\pi \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right)$$

Откуда

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right)$$

B1 0.20 Найдите потенциал на оси кольца на расстоянии  $x$  от его центра.

Поскольку расстояние до всех точек кольца одинаково при всех  $x$ , а суммарный заряд кольца равен нулю

$$\varphi(x) = 0$$

B2 1.00 Найдите модуль напряженности поля в центре кольца.

Если векторно просуммировать поля от зарядов половины кольца, то поскольку оно заряжено равномерно, модуль электрического поля будет равен диаметру окржности, полупериметр которой равен сумме модулей напряжённости полей зарядов

$$|E| = \frac{kQ}{R^2}$$

Тогда выражение для поля половины кольца

$$E = \frac{2|E|}{\pi} = \frac{2kQ}{\pi R^2}$$

Вектор поля второй половины равен по модулю  $E$  и направлен противоположно первому. Таким образом

$$E = \frac{4kQ}{\pi R^2} = \frac{\lambda}{\pi R \epsilon_0}$$

ВЗ 0.80

Найдите модуль напряженности поля на оси кольца на расстоянии  $x$  от его центра.

Воспользуемся результатом предыдущего пункта. Поскольку потенциал на оси кольца нулевой, проекция суммарного поля на направление оси нулевая. Тогда из предыдущего поля находим выражение для электрического поля

$$E = \frac{4kQR}{\pi(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\lambda R^2}{\pi(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

С1 0.30

Чему равен модуль напряженности электрического поля на расстоянии  $r < R$  от оси цилиндра?

В силу симметрии поле может быть направлено только перпендикулярно оси цилиндра. Из теоремы Гаусса для цилиндрической поверхности радиуса  $r$  и некоторой длины  $L$ , ось которой совпадает с осью исходного цилиндра, следует, что поток наряжённости электрического поля будет равен нулю. Поскольку на равных расстояниях от оси цилиндра поле будет иметь одинаковую величину, поток представляется следующим выражением

$$\Phi = 2\pi r L E = 0$$

откуда следует, что при любых значениях  $r$

$$E = 0$$

С2 2.00

Найдите модуль напряженности поля в центре основания цилиндра  $O$ .

Рассмотрим смещение на малую величину  $dx$  вдоль оси цилиндра. Из определения потенциала

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx}$$

Найдём изменение потенциала. После смещения расположение точки и цилиндра совпадают с точностью до кольца толщины  $dx$ , которое переместилось из основания в бесконечность. Поэтому выражение для изменения потенциала следующее

$$d\varphi = -\frac{2k\pi R \sigma dx}{R} = -2k\pi \sigma dx$$

Откуда

$$E_x = 2k\pi \sigma = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

СЗ 0.70

Рассмотрим точку  $A$  в основании цилиндра, находящуюся на расстоянии  $r < R$  от точки  $O$ . Найдите проекцию вектора напряженности электрического поля на линию  $OA$ .

В пункте  $A1$  было показано, что внутри бесконечного цилиндра поле обращается в ноль. Дополним полубесконечный цилиндр до бесконечного и рассмотрим поле в его основании.

Поля исходного и добавленного полубесконечных цилиндров симметричны относительно основания. Поэтому, суммарное поле может обращаться в ноль только в случае, если каждая из компонент перпендикулярна основанию. Таким образом

$$E_{OA} = 0$$

С4 3.00

Для рассматриваемого полубесконечного цилиндра найдите модуль напряженности электрического поля в точке  $A$ , находящейся на расстоянии  $r = 0.9R$  от точки  $O$ .

В пункте *A3* было доказано, что в любой точке основания поле перпендикулярно ему. Для определения его величины в каждой точке воспользуемся теоремой о циркуляции электростатического поля. Выберем прямоугольный контур, проходящий через точку *O* и произвольную точку основания *A* такой, что другая его сторона  $h \ll OA$ . Тогда циркуляцию  $\Gamma$  можно представить в виде

$$\Gamma = (E_O - E_A) h + \Gamma_{OA}$$

где  $\Gamma_{OA}$  - часть циркуляции по направлению *OA*.

Найдём радиальную компоненту поля на высоте *h* над основанием цилиндра. Поскольку в основании поле перпендикулярно ему, при небольшом смещении от него радиальная компонента поля будет эквивалентна полю кольца толщины *dh* с поверхностной плотностью заряда  $-\sigma$ . Таким образом

$$\Gamma_{AB} = k\sigma h S_{AB}$$

где  $S_{AB}$  - площадь под графиком  $y(x)$  от 0 до  $x = 0,9$ . Поскольку суммарная циркуляция равна нулю

$$E_A = E_O + k\sigma S_{AB}$$

Или же

$$E_A = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 + \frac{S_{AB}}{2\pi} \right) = 0,72 \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

где

$$S_{AB} = 2,8 \pm 0,1$$

### Второй метод

Метод потребует численного интегрирования (это могут делать калькуляторы типа Casio fx-991). При выполнении численного интегрирования вручную (на калькуляторах типа Casio fx-82) может получиться значительная погрешность из-за расходимости интеграла вблизи 1.

Рассмотрим какое поле создает полубесконечная нить с линейной плотностью заряда  $\lambda$  на расстоянии *x* от ее конца (в плоскости, перпендикулярной нити и проходящей через ее конец). В частности, нас будет интересовать только компонента поля, параллельная нити:  $E_{||}$ . Можно получить эту величину сразу, используя метод виртуальных перемещений, либо можно разбить нить на бесконечно малые отрезки длиной *dh* и проинтегрировать в диапазоне  $h \in [0, \infty)$ .

$$E_{||} = \int_0^\infty \frac{h}{\sqrt{x^2 + h^2}} \cdot \frac{k\lambda dh}{x^2 + h^2} = k\lambda \cdot \frac{-1}{\sqrt{x^2 + h^2}} \Big|_{h=0}^{h=\infty} = \frac{k\lambda}{x}$$

Возвращаясь к исходной задаче, можно разбить весь полубесконечный цилиндр на полубесконечные прямоугольники шириной  $Rd\alpha$  (по сути полубесконечные нити). Каждая нить задана углом  $\alpha$  между направлением из центра на нее и отрезком OA. По теореме косинусов, расстояние между концом нити и точкой A равно  $x(\alpha) = \sqrt{R^2 + r^2 - 2rR \cos \alpha}$ . Каждая нить создает поле, перпендикулярное основанию, вычисляемое по формуле для  $E_{||}$ , в котором  $\lambda = \sigma R d\alpha$ . Суммарное поле в точке A при  $r = 0.9R$  находится интегрированием:

$$E = \int_0^{2\pi} \frac{k\sigma R d\alpha}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR \cos \alpha}} = k\sigma \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1.81 - 1.8 \cos \alpha}} d\alpha$$

К сожалению, интеграл не выражается в элементарных функциях, однако можно вычислить его численно, что приводит к ответу:

Ответ:

$$E = 9.122k\sigma = 0.7259 \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$