

A1^{0.20} Выразите L через R и α при $h = 0$.

Солнечные лучи можно считать параллельными. При нулевом уровне жидкости в сосуде дно крайними не освещающими дно являются лучи, касающиеся шара. Проводя их продолжения до пересечения с дном

$$L = \frac{2R}{\cos(\alpha)}$$

A2^{0.30} Выразите L через R, α, β, l и h при $0 < h < h_1$.

Лучи преломляются и остаются параллельны друг другу. Поскольку поверхность жидкости параллельна основанию сосуда, преломление лучей, касающихся шара, не влияет на длину тени. Таким образом

$$L = \frac{2R}{\cos(\alpha)}$$

A3^{1.00} Выразите h_1 через l, R, α и β .

Излом графика наступает тогда, когда один из крайних лучей не может коснуться шара до преломления в жидкости. Таким образом, в момент, когда на графике начинается излом, касательная к шару направлена под углом α к вертикали. Отсюда получаем ответ

$$h_1 = l + R(1 - \sin(\alpha))$$

B1^{2.50} При $h_1 < h < h_2$ получите зависимость длины тени от l, R, α, β и h .

Поскольку $\beta < \alpha$, пока касательная к шару не станет образовывать угол β с вертикалью, все лучи после преломления не будут пересекать шар. Тогда границей тени является луч, преломляющийся в точке контакта шара с поверхностью жидкости. Пусть H - высота центра шара над поверхностью жидкости. Тогда найдём длину тени

$$L = \frac{R}{\cos(\alpha)} + H \tan(\alpha) + \sqrt{R^2 - H^2}$$

Выражение для H следующее

$$H = l + R - h$$

Откуда

$$L = \frac{R}{\cos(\alpha)} + (l + R - h) \tan(\alpha) + \sqrt{R^2 - (l + R - h)^2}$$

B2^{1.00} Выразите h_2 через l, R, α, β .

Как мы уже знаем, пока касательная к шару составляет с вертикалью угол больший, чем β , границей тени является луч, преломленный в точке контакта шара с поверхностью. Отсюда

$$h_2 = l + R(1 - \sin(\beta))$$

C1^{1.30} Поскольку участок линейный, зависимость $L(h)$ имеет вид $L = L_0 - kh$. Выразите L_0 и k через l, R, α и β .

Если касательная к шару в точке контакта с поверхностью жидкости составляет с вертикалью угол меньший чем β , один из лучей после преломления касается шара уже внутри жидкости и уже является границей тени. Сохраним обозначение H , введённое при решении пункта **B1**. Тогда

$$L = \frac{R}{\cos(\alpha)} + H \tan(\alpha) + \frac{R}{\cos(\beta)} - H \tan(\beta)$$

Подставляя выражение для H , получим

$$L = \frac{R}{\cos(\alpha)} + \frac{R}{\cos(\beta)} + (l + R)(\tan(\alpha) - \tan(\beta)) - (\tan(\alpha) - \tan(\beta))h$$

Откуда

$$L_0 = \frac{R}{\cos(\alpha)} + \frac{R}{\cos(\beta)} + (l + R)(\tan(\alpha) - \tan(\beta))$$

$$k = \tan(\alpha) - \tan(\beta)$$

C2 0.20 Выразите минимальную длину тени через l , R , α и β .

В некоторый момент уровень поднимется так высоко, что верхний касающийся шара луч будет касаться его и после преломления. В дальнейшем именно верхний луч, касающийся шара после преломления, определяет длину его тени. Она остаётся постоянной и равна

$$L = \frac{2R}{\cos(\beta)}$$

C3 0.50 Выразите h_3 через l , R , α и β .

Используем результат предыдущего пункта

$$\frac{2R}{\cos(\beta)} = \frac{R}{\cos(\alpha)} + \frac{R}{\cos(\beta)} + (l + R)(\operatorname{tg}(\alpha) - \operatorname{tg}(\beta)) - (\operatorname{tg}(\alpha) - \operatorname{tg}(\beta))h_3$$

Откуда

$$h_3 = l + R\left(1 + \frac{\cos(\beta) - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha - \beta)}\right)$$

D1 1.50 Найдите численные значения $\cos \alpha$ и $\cos \beta$.

Из графика получим, что

$$\frac{L_{max}}{L_{min}} = \frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)} = \frac{4}{3}$$

Найдём угловой коэффициент линейного участка графика

$$k = \operatorname{tg}(\alpha) - \operatorname{tg}(\beta) = \frac{7}{12}$$

Используя известное выражение

$$\frac{1}{\cos^2(\alpha)} = 1 + \operatorname{tg}^2(\alpha)$$

получаем

$$\operatorname{tg}(\alpha) - \sqrt{\frac{9}{16}(1 + \operatorname{tg}^2(\alpha))} - 1 = \frac{7}{12}$$

Получаем квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg}(\alpha)$

$$\operatorname{tg}^2(\alpha) - \frac{8\operatorname{tg}(\alpha)}{3} + \frac{16}{9} = 0$$

Его решение

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{4}{3}$$

Получим ответы на вопросы

$$\cos(\alpha) = \frac{3}{5}; \cos(\beta) = \frac{4}{5}$$

D2 0.50 Найдите радиус шарика R .

Максимальная длина тени равна

$$L_{max} = \frac{2R}{\cos(\alpha)} = 14 \text{ см}$$

откуда

$$R = \frac{L_{max}\cos(\alpha)}{2} = 4,2 \text{ см}$$

D3^{0.50} Найдите показатель преломления жидкости n .

$$n = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{4}{3}$$

D4^{0.50} Найдите длину нити l .

Наиболее точно l можно измерить по точке h_3

$$l = h_3 - R\left(1 + \frac{\cos(\beta) - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha - \beta)}\right) = h_3 - \frac{12}{7}R = 5,3 \text{ см}$$