

Road to IPhO

Двойная гантель

На гладкой горизонтальной поверхности лежит «двойная гантель» – система, состоящая из двух лёгких стержней длины L , соединённых шарниром массы $2m$. На свободных концах стержней закреплены грузы массы m . В этой задаче исследуется движение данной системы при разных условиях.

Часть А. Движение на поверхности (2 балла)

В начальный момент грузы и шарнир лежат на одной прямой. В некоторый момент один из стержней начинают вращать с постоянной угловой скоростью ω , причём груз на его конце всё время неподвижен. В этой части задачи необходимо найти угловую скорость вращения второго стержня в разные моменты движения. Считайте известным, что угловая скорость – векторная величина, направленная перпендикулярно плоскости движения (для первого стержня она сонаправлена с осью OZ и равна $\vec{\omega}$). Также считайте известным закон сложения угловых скоростей

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{\text{отн}} + \vec{\omega}_{\text{пер}}$$

где $\vec{\omega}_{\text{пер}}$ – угловая скорость вращающейся системы отсчёта, $\vec{\omega}_{\text{отн}}$ – угловая скорость движения относительно вращающейся системы отсчёта.

A1 Найдите вектор угловой скорости второго стержня в начальный момент времени. Ответ выразите через $\vec{\omega}$. **0.3**

Перейдём во вращающуюся систему отсчёта, связанную с первым стержнем. Во вращающейся системе отсчёта на груз второго стержня в плоскости движения помимо силы его натяжения действуют центробежная и Кориолисова силы. Влияние Кориолисовой силы в данной задаче учитывать не нужно, поскольку она перпендикулярна скорости груза и не меняет его кинетическую энергию. Напомним выражение для центробежной силы

$$\vec{F}_{\text{цб}} = m\omega^2\vec{r}$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор груза во вращающейся системы отсчёта, проведённый из начала координат.

A2 В начальный момент времени найдите вектор угловой скорости $\vec{\omega}_{\text{отн0}}$ второго стержня в системе отсчёта, связанной с первым стержнем. Ответ выразите через $\vec{\omega}$ **0.2**

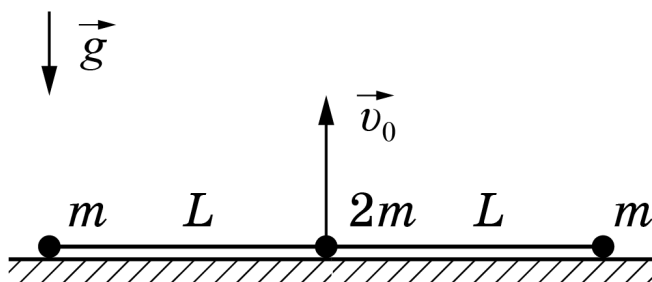
A3 Найдите потенциальную энергию груза в поле центробежной силы на расстоянии r от оси вращения с точностью до произвольной постоянной. Ответ выразите через m, ω, r . **0.5**

A4 Пусть второй стержень повернулся на угол φ относительно первого. Найдите его угловую скорость $\vec{\omega}_{\text{отн}}$ в данном положении. Ответ выразите через $\vec{\omega}$ и φ . **0.5**

Теперь вам предстоит скорость груза в неподвижной системе отсчёта. Используйте закон сложения скоростей для вращающихся систем отсчёта.

A5 Найдите скорость груза в неподвижной системе отсчёта. Ответ выразите через ω, L, φ . **0.5**

Часть В. Движение в вертикальной плоскости (4.2 балла)



В этой части задачи в начальный момент времени грузы и шарнир находятся на одной прямой и шарниру сообщается скорость v_0 , направленная вертикально вверх. Вам предлагается исследовать дальнейшее движение такой системы. Пусть в некоторый момент времени стержни образуют угол φ с горизонтом.

Road to IPhO

Ось OX направлена горизонтально, а ось OY – вертикально вверх.

B1 Обозначим силу натяжения стержней за T . 0.4

Найдите ускорения грузов $a_{1л}$, $a_{1п}$ в проекции на ось OX и ускорение шарнира a_2 в проекции на ось OY .
Ответы выразите через m , g , T и φ .

B2 В указанном положении найдите скорости грузов v_1 и скорость шарнира v_2 . 0.6

B3 Запишите уравнение движения шарнира относительно любого из грузов, связывающее v_1 , v_2 , a_1 , a_2 , L и φ . 1.0

B4 Найдите силу натяжения T из уравнения, полученного в пункте **B3**. Ответ выразите через m , v_0 , g , L , φ . 0.7

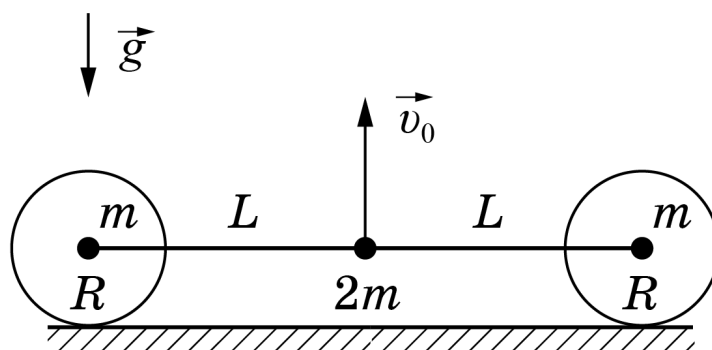
B5 Предположим, что в некоторый момент грузы отрываются от поверхности. 1.0

Найдите значение угла $\varphi_{отр}$ в этот момент времени.

B6 Найдите минимальное значение v_0 , при котором грузы оторвутся от поверхности и значение угла φ' в момент отрыва. 0.5

Часть С. Грузы в лёгких упругих оболочках (3.8 балла)

Данная часть задачи является фактическим продолжением предыдущей. Отличие состоит в том, что теперь грузы находятся в центрах лёгких упругих оболочек радиуса $R < L$. Предполагается, что скорость v_0 шарнира достаточна для того, чтобы в части **B** грузы оторвались от поверхности. Обозначим за φ_0 угол стержней с горизонтом в момент касания оболочек.



C1 При каких значениях R столкновение оболочек происходит раньше их отрыва от поверхности под действием стержней? Ответ выразите через L , $\varphi_{отр}$. 0.2

В дальнейшем считайте, что условие на R , полученное в предыдущем пункте выполняется.

C2 Пусть сразу после столкновения проекции скорости груза на оси OX и OY равны v_{1x} и v_{1y} соответственно. 1.0
Выразите проекцию скорости шарнира на вертикальную ось v_{2y} через v_{1x} , v_{1y} и φ_0 .

C3 Найдите скорость шарнира v_2 сразу после соударения. Ответ выразите через v_0 , g , L , R . 1.3

C4 Найдите модуль скоростей грузов v_1 сразу после соударения. Ответ выразите через v_0 , g , L , R . 1.3