

Road to IPhO

Фонтанирующая цепочка

Если длинную нитку бус положить в стеклянный сосуд и выдернуть ее свободный конец, то бусы будут не просто выскальзывать и падать на пол, а изогнутся дугой. Бусины, подобно воде в фонтане, будут как бы выпрыгивать на заметную высоту над краем стакана. Цель данной задачи — постараться описать физические причины этого удивительного явления и получить количественную оценку величины эффекта «фонтана».

Везде в задаче можно считать линейную плотность цепочки бус известной и равной λ , ускорение свободного падения g .



Часть А. Равноускоренное падение (0.8 балла)

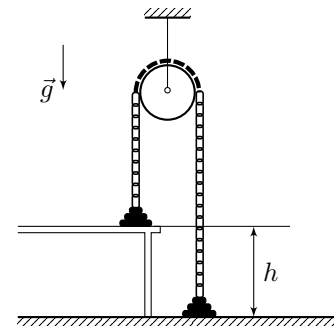
Для начала, пренебрегая эффектом «фонтана», предположим, что наполняющая стакан цепочка бус просто переваливается через его край, и нижний конец цепочки ускоренно спускается. Выпавшие из стакана звенья цепи связаны друг с другом, поэтому импульс силы тяжести расходуется не только на ускорение выпавших звеньев, но и на присоединение новых звеньев к падающей массе, и ускорение получается меньше, чем g .

A1 Найдите ускорение нижнего конца цепи, если известно, что оно постоянно.

0.8

Часть В. Классика (2.5 балла)

Для выявления части причин возникновения «фонтана» решим и проанализируем классическую задачу. Цепь с неупругими звеньями перекинута через блок, причем часть ее лежит на столе, а часть – на полу. После того, как цепь отпустили, она начала двигаться. Требуется найти скорость установившегося равномерного движения цепи. Высота стола h .



B1 Считая, что потери механической энергии звеньев происходят только при ударе их о пол, а всё предыдущее время механическая энергия сохраняется, найдите скорость v установившегося равномерного движения цепи. **0.3**

Для проверки сохранения механической энергии при отрыве звеньев от стола решим задачу иным путём: используя закон изменения импульса.

B2 Чему равно натяжение цепи T_f в точках, подлетающих к полу? Каково натяжение цепи $T(h)$ в точках, находящихся на h выше уровня пола? Одинаково ли натяжение в находящихся на одинаковой высоте точках левого и правого отрезков цепи? **0.5**

B3 Запишите закон изменения импульса и рассчитайте силу натяжения T_t в точках цепи, близких к уровню стола. Ответ выразите с использованием v . **0.5**

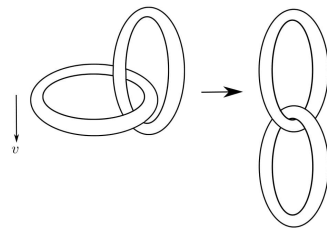
B4 Опираясь на результаты пунктов **B2** и **B3**, выразите искомую скорость v . **0.2**

Road to IPhO

Приступим к анализу энергетических потерь в системе.

- B5** Какая механическая энергия за единицу времени $\frac{\Delta W_f}{\Delta t}$ переходит в тепло при неупругих ударах упавших звеньев о пол? **0.2**

Различие в результатах пунктов **B1** и **B4** обусловлено потерями энергии, когда уже летящие звенья цепи резко «дёргают» очередное еще лежащее на столе звено. При этом происходит некая затухающая последовательность продольных рывков в недавно взлетевшей части цепи, либо, можно считать, один неупругий удар, приводящий к совместному движению нового звена с уже летящими. Потери энергии при таком неупругом ударе проще всего описать, перейдя в систему отсчета, поднимающуюся вверх со скоростью цепи v .



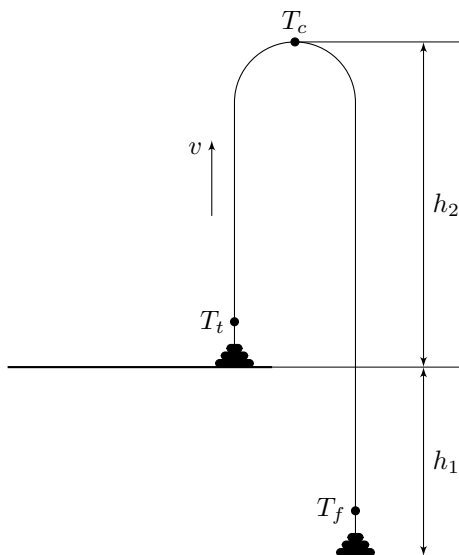
- B6** Рассчитайте потери механической энергии за единицу времени $\frac{\Delta W_t}{\Delta t}$ при неупругих ударах новых звеньев об уже взлетевшие. **0.5**

- B7** Найдите отношение $\frac{\Delta W_t}{\Delta W_f}$ потерь энергии на столе и на полу. **0.1**

- B8** Если рассмотреть одни и те же звенья **ДО** их отрыва от стола и **ПОСЛЕ** их преземления на пол, то можно рассчитать изменение их потенциальной энергии. Покажите, что оно совпадает с суммой потерь на столе и на полу. **0.2**

Часть С. Верхняя оценка высоты «фонтана» (2.0 балла)

Мы готовы рассмотреть случай «фонтана». Здесь и далее считаем, что «фонтан» уже установился и сохраняет постоянную форму и скорость, на столе и на полу лежат концы цепочки.



- C1** По аналогии с пунктами **B2** и **B3** запишите выражения для сил натяжения цепи в разных точках: T_t (над столом), T_c (в петле вблизи потолка), T_f (вблизи пола). **0.2**

- C2** Объединив записанные выражения с законом изменения импульса, решите систему уравнений и получите выражения для v и для предполагаемой высоты «фонтана» h_2 . **0.4**

Поскольку полученный результат противоречит эксперименту, требуется скорректировать модель явления. Предположим, во-первых, что существует некая сила реакции опоры, действующая со стороны стола на «подскакивающее» со стола звено. Из соображений размерности эта сила должна быть пропорцио-

Road to IPhO

нальна λv^2 , поэтому пусть $R = \alpha \lambda v^2$, где α – некий численный коэффициент. Во-вторых, пусть натяжение цепи вблизи пола равно $\beta \lambda v^2$, где β – также численный коэффициент.

C3 Чему равны коэффициенты α и β в упрощенной модели, рассмотренной ранее в пункте C1?

0.2

C4 В описанных новых предположениях повторите выкладки, аналогичные пункту C2, и получите выражения для $\frac{h_2}{h_1}$ и для отношения $\frac{E_{\text{кин}}}{E_{\text{пот}}}$ кинетической энергии летящего звена к его начальной потенциальной энергии (отсчитываемой от уровня пола).

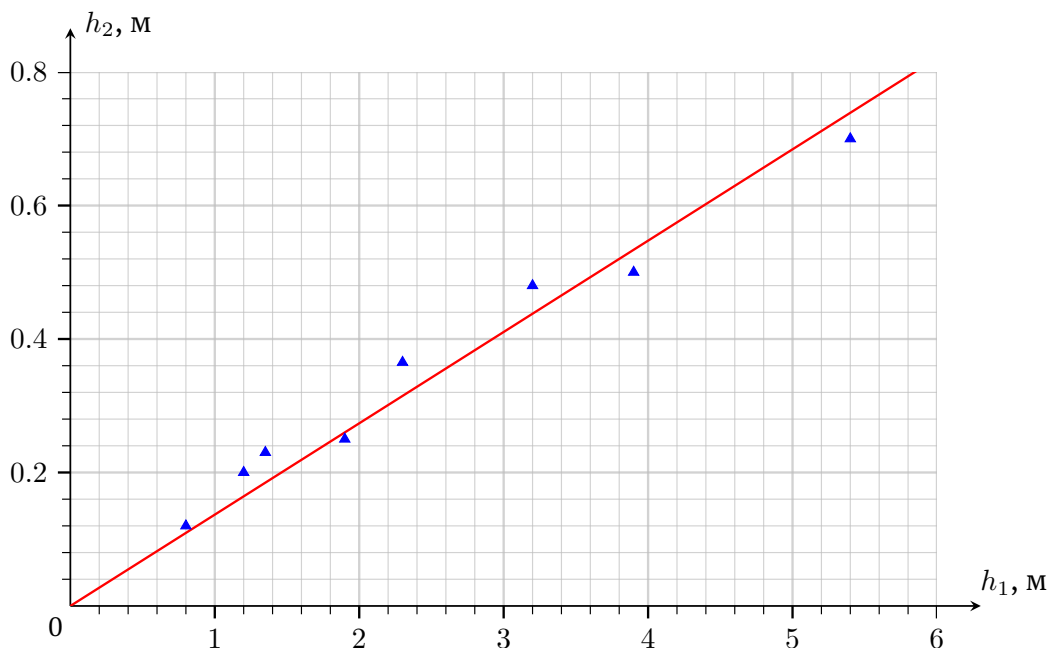
0.6

C5 Какому условию должны удовлетворять α и β , чтобы не нарушался закон сохранения энергии? При каких значениях α_0 и β_0 достигается максимальная допустимая высота «фонтана»? Чему равны соответствующие этой оценке отношения $\left(\frac{h_2}{h_1}\right)_{\text{max}}$ и $\left(\frac{E_{\text{кин}}}{E_{\text{пот}}}\right)_{\text{max}}$?

0.6

Часть D. Эксперимент (0.2 балла)

Полученная оценка h_2 оказывается завышенной. На рисунке ниже приведён график $h_2(h_1)$, описывающий наблюдаемые в экспериментах величины эффекта.

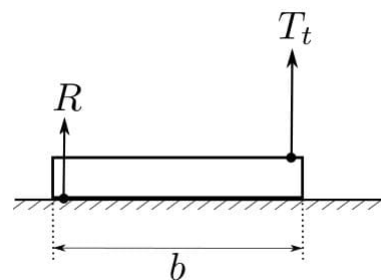


D1 По графику рассчитайте экспериментальный коэффициент $\left(\frac{h_2}{h_1}\right)_{\text{exp}}$.

0.2

Часть E. Вращение звеньев (2.0 балла)

Возникновение существенной реакции опоры R , «подталкивающей» отрывающиеся от стола звенья, противоречит интуиции. Попробуем, однако, описать одну из причин ее появления. Пусть цепь состоит из звеньев длины b и массы m , I – момент инерции каждого звена (относительно оси, проходящей через его центр и перпендикулярной плоскости рисунка). Если, например, к правому концу звена, которое вот-вот оторвется от стола, приложить большую силу $T_t \gg mg$, то в первый момент после этого будет ускоряться и поступательное, и вращательное движение звена.



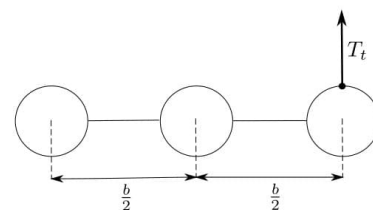
Road to IPhO

E1 Рассчитайте, какая сила R должна действовать на левый конец звена для возникновения такого движения. Ответ выразите через m, b, I, λ . **1.1**

E2 Считая, что цепь – соединенные друг с другом «штырьки» (т.е. звенья – тонкие цилиндры), рассчитайте $\alpha_{\text{шт.}}$ – численное значение коэффициента, введенного ранее соотношением $R = \alpha \lambda v^2$. Примите $\beta \approx 0$ и найдите $\left(\frac{h_2}{h_1}\right)_{\text{шт.}}$. **0.3**

E3 Считая теперь звенья тонкими обручами, рассчитайте $\alpha_{\text{обр.}}$. Примите $\beta \approx 0$ и найдите $\left(\frac{h_2}{h_1}\right)_{\text{обр.}}$. **0.3**

Если в качестве цепочки использовать бусы, то отрыв звеньев от стола затрагивает сразу несколько соседних бусинок. Предположим, что в движение приводится отрезок из трех маленьких соседних шариков, жестко связанных друг с другом невесомыми отрезками длины $b/2$. Пусть сила T_t действует на один из концов этой «тройки».



E4 Рассчитайте α_3 . Примите $\beta \approx 0$ и найдите $\left(\frac{h_2}{h_1}\right)_3$. **0.3**

Помимо описанной причины возникновения R , связанной с неточечностью звеньев, есть еще много факторов, дающих вклад в эту силу, но их полноценный расчет сложен и сильно зависит от конструкции цепи. Например, если это бусы, то отрыв от стола может начинаться с горизонтального «протаскивания» нескольких бусинок по куче неподвижных. Во время такого «протаскивания» могут происходить удары, реакция опоры в которых будет иметь вертикальную составляющую. Дальнейший анализ процесса отрыва звеньев выходит за рамки задачи.

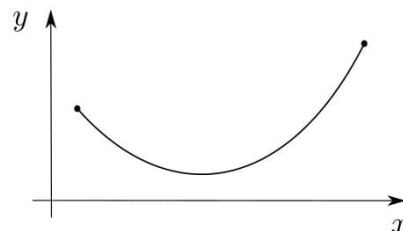
Часть F. Форма «фонтана» (2.5 балла)

В первую очередь рассмотрим задачу о «цепной линии», т.е. опишем, какую форму принимает цепочка с закрепленными концами, статично висящая в поле тяжести. Пусть введена координата s , отсчитываемая вдоль цепочки от одного из ее концов. От s зависят угол наклона $\theta(s)$ касательной к цепочке и сила натяжения $T(s)$. Рассмотрим маленькую дугу длины ds в окрестности некоторого s .

F1 Записав второй закон Ньютона в проекции на касательную к цепочке и на перпендикуляр к ней, получите систему дифференциальных уравнений, связывающих функции $T(s)$, $\theta(s)$ и содержащих постоянные λ и g . Решать систему не требуется. **1.0**

Известно, что решая подобную систему уравнений, можно получить зависимость $y(x)$, описывающую цепную линию в Декартовых координатах. Красивый факт состоит в том, что цепная линия – гиперболический косинус: $y(x) = A + B \cdot \text{ch}(Cx + D)$, где A, B, C, D – некоторые константы, выражаемые через длину цепочки и координаты точек подвеса. Все возможные цепные линии имеют уравнения такого вида.

От «статической» задачи перейдем к «динамической». Рассмотрим фонтанирующую цепочку и допустим, что форма «фонтана» установилась, т.е. траектории всех звеньев в точности повторяют друг друга. Скорость цепочки в «фонтане» равна v .



F2 Аналогично пункту F1, запишите систему дифференциальных уравнений, связывающих функции $T(s)$ и $\theta(s)$ для линии «фонтана». Решать систему не требуется. **1.0**

Road to IPhO

F3 Пусть $T(s)$ – натяжение в линии фонтана, т.е. функция, удовлетворяющая уравнениям из пункта **F2**. Функция $(T(s) - \tau)$ удовлетворяет системе уравнений для цепной линии из пункта **F1** при некотором значении постоянной τ . Выразите τ . **0.5**

Сила натяжения в каждой точке увеличена на τ по сравнению со «статичной» задачей, и это единственное отличие: известно, что подобная добавка к $T(s)$ не влияет на форму кривой. Таким образом, мы доказали, что «фонтан» — тоже цепная линия!