



В некоторых приложениях возникает необходимость в получении крайне узких потоков жидкости. Узость потока значительно ускоряет смешивание вещества с окружением, что позволяет изучать быстропротекающие химические реакции. Также использование узких потоков позволяет уменьшить количество используемого вещества.

Если создавать узкий поток с помощью поршня, выдавливающего жидкость через узкое отверстие, полученное течение оказывается крайне турбулентным. Это сильно затрудняет эксперименты. Изготовление достаточно узких каналов также достаточно трудоемко.

Эти сложности можно обойти, если сжимать поток, окружая его потоком другой жидкости. В зависимости от параметров течения, ширина центральной части потока может существенно уменьшаться. Это явление называется гидродинамической фокусировкой. В этой задаче мы рассмотрим простейшие модели гидродинамической фокусировки.

Часть А. Течение одной жидкости (2.7 балла)

Известно, что если скорость жидкости зависит только от координаты x и направлена вдоль оси y , то между двумя слоями жидкости действует сила

$$F = \eta S \frac{dv}{dx}.$$

S – площадь соприкосновения жидкостей. Сила, действующая на более медленно движущийся слой направлена в сторону его движения.

Рассмотрим течение жидкости в щели между двумя параллельными плоскостями. Расстояние между двумя плоскостями d , ширина плоскостей w , длина L . Разность давлений на краях системы ΔP . Вязкость жидкости η . Ось x направлена перпендикулярно плоскостям, ось y – в направлении течения жидкости. Мы считаем, что $d \ll w$, поэтому можно пренебрегать эффектами на границе считать, что скорость течения зависит только от x и всюду направлена вдоль оси y . Течение везде считаем стационарным, то есть распределение скоростей не зависит от времени.

A1 ^{1.00} Пусть $v(x)$ – скорость течения жидкости в щели. Начало координат оси Ox находится посередине между плоскостями, а плоскости, ограничивающие течение, находятся при $x = \pm d/2$. Разность давлений на противоположных краях щели равна ΔP . Рассматривая силы, действующие на бесконечно малый слой жидкости толщины dx , получите дифференциальное уравнение на $v(x)$. Найдите из него $v(x)$. На стенках щели скорость обращается в 0. Найдите среднюю скорость течения жидкости $\langle v \rangle$ (выразите ее через $\Delta P, L, \eta, d$). Найдите поток (поток – объем жидкости, протекающий через щель в единицу времени) жидкости через щель. Выразите ответ через $\Delta P, L, \eta, d, w$.

A2 ^{0.80} Теперь рассмотрим течение жидкости через длинную круглую трубку длины L и радиуса r . Из соображений симметрии скорость при течении через трубку зависит только от расстояния до ее оси. На границе трубки скорость обращается в 0. Найдите зависимость скорости от расстояния до оси ρ . Разность давлений на между концами трубки ΔP , вязкость жидкости η .

Найдите объемный расход q при течении жидкости через трубку. Ответ выразите через $\Delta P, L, r, \eta$.

И для течения через щель, и для течения через трубку поток пропорционален разности давлений на концах. Зависимость потока от давления можно записать в виде $q = \Delta P/R$, где R – гидродинамическое сопротивление трубки (или щели).

A3 ^{0.20} Найдите гидродинамические сопротивления щели R_s и трубки R_t . Ответ выразите через геометрические размеры, заданные в пунктах A1 и A2 соответственно и через вязкость жидкости η .

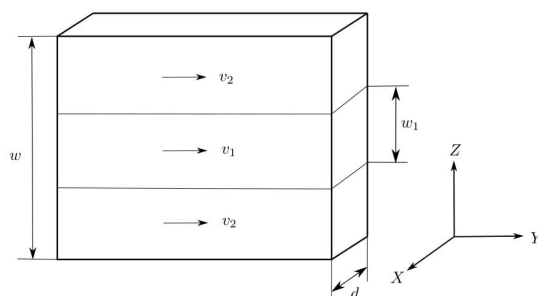
A4 ^{0.70} Жидкость вязкости η течет по трубке радиуса r и длины L под действием разности давлений ΔP (как в A2). Найдите мощность сил вязкого трения.

Часть В. Два типа жидкостей (1.4 балла)

Пусть теперь между плоскостями текут два типа жидкостей.

На центральном участке течет интересующий нас образец (все относящиеся к нему величины будем обозначать индексом 1). Ширина его потока w_1 . Оставшуюся часть потока (по краям) занимает жидкость 2, которая сжимает образец (см. рисунок). В последующих частях задачи нас будет интересовать отношение ширины образца к общей ширине потока w_1/w .

Мы будем считать, что ширина потока много больше толщины щели $w_1 \gg d$. Тогда влиянием области соприкосновения жидкостей на поток можно пренебречь, и считать, что скорость жидкости в каждой точке зависит только от ее свойств и координаты x (ось Ox перпендикулярна плоскостям). На границах щели при $x = \pm d/2$ скорость обращается в 0 как в части А.



B1 ^{0.40} Пусть заданы объемные расходы q_1 и q_2 жидкостей 1 и 2, а также их средние скорости $\langle v_1 \rangle$ и $\langle v_2 \rangle$. Найдите относительную ширину потока образца w_1/w .

B2 ^{0.40} Пусть заданы вязкости жидкостей η_1 и η_2 , а их средние скорости определяются результатами части А. Выразите w_1/w через q_1, q_2, η_1 и η_2 . Эффектами, которые происходят на границе между жидкостями 1 и 2, можно пренебречь, так как они важны только в области шириной порядка $d \ll w$.

Жидкости 1 и 2 поступают из двух резервуаров, расположенных на высотах h_1 и h_2 под действием силы тяжести. Эти резервуары соединены с основной частью установкой системой трубок. Можно считать, что поток жидкости через каждую трубку не зависит от времени и пропорционален разности давлений на ее концах

$$q_i = \Delta P_i/R_i.$$

Здесь R_i – гидростатическое сопротивление трубки.
Это сопротивление зависит от параметров трубки и от свойств жидкости. Разность давлений на концах трубки создается за счет силы тяжести.

Для того, чтобы сделать поток не зависящим от параметров щели, нужно чтобы сопротивления трубок были много больше сопротивления всех остальных частей схемы.

Для этого в трубки добавляются специальные очень узкие цилиндрические капилляры – реостаты.
В дальнейшем мы будем считать, что все сопротивление подводящих трубок определяется сопротивлением этих реостатов.

Предположим, что геометрические размеры реостатов (их радиусы и длины) для источников обеих жидкостей одинаковы.

- B3**^{0.30} Найдите отношение потоков q_1/q_2 , если заданы плотности жидкостей (ρ_1 и ρ_2), их вязкости (η_1 и η_2) и высоты, на которые подняты резервуары h_1 и h_2 .
- B4**^{0.30} Найдите соответствующее отношение ширин потоков w_1/w .

Часть C. Учет гравитации (2.8 балла)

Эксперименты показывают, что в случае разных плотностей жидкостей 1 и 2 сфокусированный поток наиболее стабилен, когда направление течения вертикально. В таком случае ширина потока может измениться под действием силы тяжести.

- C1**^{0.40} Опять рассмотрим течение одной жидкости между плоскостями. Однако теперь скорость создается не только за счет разности давлений, но и за счет силы тяжести. Геометрия такая же как и в части A1, сила тяжести направлена вдоль оси y . Поток жидкости сонаправлен с силой тяжести. Найдите среднюю скорость жидкости. Выразите ответ через $\rho, g, \eta, d, \Delta P, L$.
- C2**^{0.80} Пусть теперь между плоскостями течет два типа жидкостей, как в части B. Написав выражения для средних скоростей жидкостей 1 и 2, исключите из них разность давлений (она одинакова для обеих жидкостей) найдите отношение $\langle v_1 \rangle / \langle v_2 \rangle$. Выразите ответ через $\langle v_2 \rangle, \eta_1, \eta_2, d, g, \rho_1, \rho_2$.
- C3**^{1.00} Подставьте выражение для средних скоростей в формулу для относительной ширины сфокусированного потока из B1. Получите уравнение для определения ширины вида

$$\frac{w}{w_1} = \dots$$

В правую часть могут входить отношение $\frac{w_1}{w}$ и безразмерные параметры $\alpha = q_2 \eta_2 / q_1 \eta_1, \beta = (\rho_1 - \rho_2) q_G / \rho_2 q_2$. Здесь $q_G = \rho_2 g d^3 w / 12 \eta_2$ – величина с размерностью потока жидкости, характеризующая влияние гравитации.

- C4**^{0.60} Решите это уравнение и найдите относительную ширину сфокусированного потока w_1/w . Ответ выразите через безразмерные величины α, β .

Часть D. Эксперимент (3.1 балла)

На эксперименте можно непосредственно регулировать не величину потока жидкости, а высоту, на которой расположен соответствующий резервуар.

Ускорение свободного падения $g = 9.8 \text{ м/с}^2$.
В качестве жидкости 2 используется вода, которая все время подается с высоты $h_2 = 0.5 \text{ м}$.
Плотность воды $\rho_2 = 10^3 \text{ кг/м}^3$.
Вязкость воды $\eta = 8.9 \cdot 10^{-4} \text{ кг/(м} \cdot \text{с)}$
Реостат представляет собой капилляр радиуса $r = 130 \text{ мкм}$ и длины $L = 0.5 \text{ м}$

Используется щель с длиной $l = 43 \text{ мм}$, шириной $w = 3 \text{ мм}$, $d = 175 \text{ мкм}$.

- D1**^{0.60} Найдите гидродинамическое сопротивление каждого из реостатов, если по ним течет вода. Пусть в качестве жидкости 1 используется раствор соли, плотность которого $\rho_1 = 1.15 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, а вязкость совпадает с вязкостью воды. Найдите q_G для такой щели.
- D2**^{0.30} Найдите относительную ширину потока жидкости 1 (раствора соли) w_1/w для случаев, когда жидкость 1 подается с высот $h_1 = 0.25 \text{ м}, 0.5 \text{ м}, 1.0 \text{ м}$.
- D3**^{0.30} Как изменится значение ширины потока, если пренебречь влиянием силы тяжести? Вычислите относительную ширину потока для тех же параметров $h_1 = 0.25 \text{ м}, 0.5 \text{ м}, 1.0 \text{ м}$, что и в предыдущем пункте, не учитывая силу тяжести.
- D4**^{0.30} Пусть теперь по центру течет некоторая жидкость 1, плотность которой равна $\rho'_1 = 0.8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, а вязкость совпадает с вязкостью воды. Найдите отношение w_1/w для значений $h_1 = 0.25 \text{ м}, 0.5 \text{ м}, 1.0 \text{ м}$.
- D5**^{0.80} Постройте качественно на одном графике зависимости w_1/w от h_2/h_1 для трех случаев: а) гравитации нет, б) по центру течет раствор соли, с) по центру течет жидкость с плотностью ρ'_1 . Все параметры как в предыдущих пунктах, высота h_2 фиксирована, меняется только h_1 .
- D6**^{0.80} Во всех расчетах мы предполагали, что потоки не зависели от времени.

Пусть резервуар для воды (жидкости 2) представляет собой цилиндр радиуса $r_r = 20 \text{ мм}$.
Оцените время, за которое уровень воды в резервуаре уменьшается на $\delta h_2 = 10 \text{ см}$. Если эксперимент провести за время такого порядка, изменение уровня воды в резервуаре практически на нем не скажется. Начальный уровень равен $h_2 = 0.5 \text{ м}$.