

A1 ^{1.00} При какой температуре тепловых резервуаров тепловая машина прекратит работу?

Пусть T_1 и T_2 — температуры горячего и холодного тел в некоторый момент времени.
В силу идеальности тепловой машины изменение энтропии системы в любой момент будет равно нулю:

$$\Delta S = C \ln \frac{T_1}{T_h} + C \ln \frac{T_2}{T_c} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_1 T_2 = T_h T_c$$

Машина прекратит работу, когда температуры резервуаров сравняются ($T_{end} = T_1 = T_2$).

Ответ:

$$T_{end} = \sqrt{T_h T_c} \approx 432 K$$

A2 ^{1.00} Какую работу совершит тепловая машина за время своей работы?

Так как система изолирована, работу легко найти из закона сохранения энергии:

$$A = W_0 - W = C(T_h + T_c) - C(T_1 + T_2) \\ A_{end} = C(T_h + T_c - 2\sqrt{T_h T_c})$$

Ответ:

$$A_{end} = C(\sqrt{T_h} - \sqrt{T_c})^2 \approx 29,9 \text{ кДж}$$

A3 ^{1.00} Через какое время развиваемая тепловой машиной мощность уменьшится вдвое?

Найдём коэффициент k , выразив работу как функцию от времени:

$$A(\tau) = \int_0^\tau P(t) dt = \frac{P_0}{k} (1 - e^{-k\tau}) \\ A_{end} = \frac{P_0}{k} \\ \frac{P_0}{2} = P_0 e^{-k\tau_{1/2}} \quad \Rightarrow \quad \tau_{1/2} = \frac{\ln 2}{k}$$

Ответ:

$$\tau_{1/2} = \frac{A_{end}}{P_0} \ln 2 \approx 21,6 \text{ с}$$

A4 ^{1.00} Через какое время КПД тепловой машины уменьшится вдвое?

Выразим из формулы для работы $A(t)$ время $t(T_1, T_2)$ как функцию T_1 и T_2 :

$$t(T_1, T_2) = -\frac{1}{k} \ln \left(1 - \frac{A}{A_{end}} \right) = -\frac{A_{end}}{P_0} \ln \left(\frac{A_{end} - A}{A_{end}} \right) = \\ = -\frac{A_{end}}{P_0} \ln \left(\frac{C}{A_{end}} (T_1 + T_2 - 2\sqrt{T_h T_c}) \right)$$

Температуры T_1 и T_2 найдём из системы и двух уравнений:

$$\begin{cases} T_1 T_2 = T_h T_c \\ \eta_{1/2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{T_c}{T_h} \right) = \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right), \end{cases}$$

где первое уравнение выведено в A_1 , а второе — следует из условия данного пункта. Из второго ответа

$$\xi^2 \equiv \frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{T_c}{T_h} \right)$$

Из чего получаем выражение для температур:

$$T_1 = \frac{T_{end}}{\xi} = \sqrt{\frac{2T_h T_c}{1 + \frac{T_c}{T_h}}} \approx 502 K$$

$$T_2 = T_{end} \xi = \sqrt{\frac{T_h T_c \left(1 + \frac{T_c}{T_h}\right)}{2}} \approx 371 K$$

Остаётся подставить значения T_1 и T_2 в выражение для $t(T_1, T_2)$.

Ответ:

$$t = -\frac{A_{end}}{P_0} \ln \left(\frac{C T_{end}}{A_{end}} \left(\sqrt{\xi} - \frac{1}{\sqrt{\xi}} \right)^2 \right) \approx 56,0 \text{ с},$$

где

$$\xi = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{T_c}{T_h} \right)}$$

A5 1.00 Через какое время разность температур между тепловыми резервуарами уменьшится вдвое?

Аналогично A_4 получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} T_1 T_2 = T_h T_c \\ T_1 - T_2 = \frac{1}{2}(T_h - T_c) \end{cases}$$

В данном случае получается квадратное уравнение на T_1 :

$$\begin{aligned} T_1^2 - \frac{(T_h - T_c)}{2} T_1 - T_h T_c &= 0 \\ D &= \frac{(T_h - T_c)^2}{4} + 4 T_h T_c \\ T_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{(T_h - T_c)}{2} + \sqrt{D} \right) \\ T_1 + T_2 &= 2 T_1 - \frac{(T_h - T_c)}{2} = \sqrt{D} \end{aligned}$$

Подставив $(T_1 + T_2)$ в $t(T_1, T_2)$, полученное в предыдущем пункте, получаем ответ.

Ответ:

$$t = -\frac{A_{end}}{P_0} \ln \left(\frac{C}{A_{end}} (\sqrt{D} - 2\sqrt{T_h T_c}) \right) \approx 41,6 \text{ с},$$

где

$$D = \frac{(T_h - T_c)^2}{4} + 4 T_h T_c$$