

A1<sup>2.40</sup>

Найдите зависимость проекции электрического поля  $E_y(y)$  от координаты  $y$ , где  $y \in (0, b]$ . Ответ выразите через  $v_0, a, b, q, m$ .

Согласно второму закону Ньютона, проекция электрического поля на ось  $Oy$  связана с проекцией ускорения частицы

$$qE_y = ma_y.$$

Поскольку электрическое поле зависит только от  $y$  и направлено вдоль оси  $Oy$ , поэтому закон движения частицы вдоль оси  $Oy$  не зависит от того, как она движется вдоль оси  $Ox$ .

Поэтому мы можем уменьшить скорость движения вдоль оси  $Ox$  в  $\frac{a}{b}$  раз, тогда вместо эллипса она будет двигаться по окружности радиуса  $b$

Угол  $\varphi$  между осью  $y$  и радиус-вектором частицы можно найти из соотношения

$$\cos \varphi = \frac{y}{b}.$$

Полная скорость частицы при этом равна

$$v = \frac{v_0 b}{a \cos \varphi}$$

Нормальное ускорение частицы равно

$$a_n = \frac{v^2}{b}$$

Полное ускорение частицы направлено против оси  $y$  и равно

$$a_y = -\frac{a_n}{\cos \varphi} = -\frac{v_0^2 b^4}{a^2 y^3}.$$

Тогда электрическое поле

Ответ:

$$E_y = -\frac{mv_0^2 b^4}{qa^2 y^3}$$

Тот же ответ можно получить, записав явную зависимость координаты  $y$  частицы от времени. Поскольку вдоль оси  $Ox$  на частицу силы не действуют  $x = v_0 t$  и

$$y = b \sqrt{1 - \frac{v_0^2 t^2}{a^2}}.$$

Дифференцируя это выражение 2 раза по времени, найдем ускорение

$$a_y = -\frac{bv_0^2}{a^2} \left(1 - \frac{v_0^2 t^2}{a^2}\right)^{-3/2}.$$

Тогда электрическое поле

$$E_y = \frac{ma_y}{q} = -\frac{mv_0^2 b^4}{qa^2 y^3}.$$

A2<sup>1.20</sup>

Из той же начальной точки в том же электрическом поле такую же частицу отпускают без начальной скорости. Определите скорость  $v_1$ , когда частица пройдёт расстояние  $s = b/41$ . Ответ выразите через  $v_0, a, b$ .

Как мы отмечали ранее, движение по оси  $x$  не влияет на движение по оси  $y$ , поэтому будем решать данную задачу как в предыдущем пункте. Модуль проекции скорости частицы  $|v_y|$  и будет являться ответом на вопрос задачи

$$|v_y| = \frac{v_0 b \tan(\varphi)}{a} = \frac{v_0 b}{a} \sqrt{\frac{b^2}{y^2} - 1}$$

где

$$y = b - s$$

Получаем

Ответ:

$$v = \frac{9v_0b}{40a}.$$

Альтернативно можно использовать закон сохранения энергии. Электрическому полю отвечает потенциал

$$\varphi = - \int dy \, E_y = \int dy \, \frac{mv_0^2b^4}{qa^2y^3} = - \frac{mv_0^2b^4}{2qa^2y^2}$$

Тогда скорость можно найти из закона сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = q(\varphi(b) - \varphi(b - s)),$$

откуда

$$v = \frac{v_0b}{a} \sqrt{\frac{b^2}{(b - s)^2} - 1} = \frac{9v_0b}{40a}.$$

Заметим также, что смещение  $s \ll b$ , поэтому можно приближенно считать движение равноускоренным. Значение ускорения  $a_y \approx qE_y(b)/m = -v_0^2b/a^2$ .

Тогда скорость можно оценить как

$$v = \sqrt{2|a_y|s} = \sqrt{\frac{2}{41} \frac{v_0b}{a}}.$$

Это выражение отличается от точного на несколько процентов.

**A3<sup>0.30</sup>** Найдите время движения  $\tau$  для предыдущего пункта. Ответ выразите через величины, заданные в A1.

Найдём время достижения угла  $\varphi$

$$x = b \sin(\varphi) = \frac{v_0bt}{a}$$

Таким образом

$$y = b \cos(\varphi) = b\sqrt{1 - \left(\frac{v_0t}{a}\right)^2}$$

Откуда

$$t = \frac{a}{v_0} \sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}$$

Окончательно

Ответ:

$$t = \frac{9a}{41v_0}.$$

Иначе можно получить время, проинтегрировав выражение для скорости:

$$t = \int_0^s \frac{ds}{v(s)} = \frac{a}{bv_0} \int_0^s \frac{ds(b - s)}{\sqrt{b^2 - (b - s)^2}}.$$

Интеграл берется элементарно:

$$t = \frac{a}{bv_0} \sqrt{b^2 - (b - s)^2} = \frac{9a}{41v_0}$$

Если же считать движение равноускоренным, то время

$$t \approx \sqrt{\frac{2}{41} \frac{a}{v_0}}.$$

Этот ответ отличается от точного на несколько процентов.

**B1<sup>0.10</sup>** Для удобства дальше будем использовать такое обозначение. Пусть  $E_y(b) = E_0$ . Запишите, как  $E_y(y)$  из A1 выражается через  $E_0, b, y$ .

Ответ:

$$E(y) = \frac{E_0 b^3}{y^3}$$

**B2** <sup>2.00</sup> Найдите  $\sigma_1, \sigma_2, \rho(y)$ . Ответ выразите через  $E_0, b, y$  и фундаментальные постоянные.

Из теоремы Гаусса получим

$$\frac{dE_y}{dy} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Откуда

$$\rho = -3 \frac{E_0 b^3 \epsilon_0}{y^4}$$

Также из теоремы при  $y = y_1$

$$E(y_1) = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0}$$

Откуда

$$\sigma_1 = 10^6 E_0 \epsilon_0$$

Для  $y = y_2$

$$E(y_2) = -\frac{\sigma_2}{\epsilon_0}$$

Откуда

$$\sigma_2 = -\frac{E_0 \epsilon_0}{8}$$

Итого

Ответ:

$$\rho = -3 \frac{E_0 b^3 \epsilon_0}{y^4}, \quad \sigma_1 = 10^6 E_0 \epsilon_0, \quad \sigma_2 = -\frac{E_0 \epsilon_0}{8}.$$

**C1** <sup>0.60</sup> Найдите точки, лежащие на прямых  $x = 0$  и  $y = 0$  такие, что потенциал в этих точках равен  $\varphi_0$ .

Найдём точки, лежащие на прямой  $y = 0$

Пусть для определённости  $x > 0$ , вторая точка имеет ту же координату по модулю, но противоположную по знаку

$$\varphi_0 = k\rho \int_{x-L}^{x+L} \frac{dr}{r} = k\rho \ln\left(\frac{x+L}{x-L}\right)$$

откуда

$$x = \pm L / th\left(\frac{\varphi_0}{2k\rho}\right)$$

Найдём точки, лежащие на прямой  $x = 0$ . Опять же, пусть для определённости  $y > 0$

$$\varphi_0 = k\rho \int_{-L}^{+L} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Пусть  $x = y \tan \alpha$ . Тогда

$$\varphi_0 = k\rho \int_{-\arctg(\frac{L}{y})}^{\arctg(\frac{L}{y})} \frac{d\alpha}{\cos(\alpha)} = k\rho \ln\left(\frac{L + \sqrt{y^2 + L^2}}{\sqrt{L^2 + y^2} - L}\right)$$

откуда

$$y = \pm L/sh\left(\frac{\varphi_0}{2k\rho}\right)$$

Ответ:

$$x = \pm L/th\left(\frac{\varphi_0}{2k\rho}\right), \quad y = \pm L/sh\left(\frac{\varphi_0}{2k\rho}\right).$$

**C2<sup>2.00</sup>** Докажите, что кривая  $y(x)$  такая, что потенциал в любой её точке равен  $\varphi_0$ , является эллипсом. Найдите уравнение данного эллипса в координатах  $y(x)$ , а также его большую и малую полуоси  $a$  и  $b$  соответственно.

В каждой точке пространства электрическое поле перпендикулярно эквипотенциальной поверхности, проходящей через эту точку. Найдём направление электрического поля в некоторой точке  $M$  пространства  
Пусть  $MH = y$  - высота, опущенная из точки  $M$  до прямой, содержащей отрезок. Рассмотрим некоторый малый участок стержня длины  $dl$ , угол между  $MH$  и прямой, соединяющей  $M$  и  $dl$ , равен  $\alpha$ . Тогда расстояние от  $M$  до  $dl$  равно  $y/\cos^2\alpha$  и он создает электрическое поле равное по модулю

$$dE = \frac{k\rho dl \cos^2(\alpha)}{y^2}$$

С другой стороны

$$dl = yd\tan\alpha = \frac{y d\alpha}{\cos^2\alpha}$$

и это поле можно выразить как

$$dE = \frac{k\rho d\alpha}{y}$$

Отсюда получаем, что поле отрезка совпадает с полем элемента дуги окружности радиуса  $y$  с центром в  $M$ , ограниченной линиями, соединяющей её с концами стержня  $A$  и  $B$ . Значит электрическое поле стержня направлено по биссектрисе угла  $AMB$ .  
Касательная к кривой  $y(x)$  направлена перпендикулярно биссектрисе угла  $AMB$ , откуда следует, что  $AM + MB = const$  (действительно, при бесконечно малом смещении вдоль нормали к биссектрисе изменения длин отрезков  $AM$  и  $MB$  равны по модулю и противоположны по знаку), то есть эквипотенциальная кривая является эллипсом с фокусами на концах стержня.  
Пусть  $a$  - большая полуось данного эллипса. Тогда эксцентриситет

$$e = \frac{L}{a}$$

Получим связь между эксцентриситетом эллипса и потенциалом  $\varphi_0$ . Для этого достаточно найти потенциал в точке  $M$  такой, что  $A, B$  и  $M$  лежат на одной прямой.

$$\varphi_0 = \int_{a-L}^{a+L} \frac{k\rho dx}{x} = k\rho \ln\left(\frac{a+L}{a-L}\right)$$

Откуда

$$e = \tanh\left(\frac{\varphi_0}{2k\rho}\right)$$

Найдём малую полуось эллипса

$$b = L\sqrt{\frac{1}{e^2} - 1} = \frac{L}{\sinh\left(\frac{\varphi_0}{2k\rho}\right)}$$

И окончательно уравнение эллипса

$$\left(\frac{x \tanh\left(\frac{\varphi_0}{2k\rho}\right)}{L}\right)^2 + \left(\frac{y \sinh\left(\frac{\varphi_0}{2k\rho}\right)}{L}\right)^2 = 1$$

Значит его полуоси

Ответ:

$$a = L / \tanh\left(\frac{\varphi_0}{2k\rho}\right), \quad b = L / \sinh\left(\frac{\varphi_0}{2k\rho}\right).$$

СЗ<sup>0.40</sup>

Найдите радиус кривизны  $R$  данного эллипса в точке с координатой  $x$ . Ответ выразите через  $x$ ,  $a$  и  $b$ .

Примечание: Если задана функция  $y = f(x)$ , то её радиус кривизны в заданной точке можно вычислить по формуле

$$R = \frac{\left(1 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}.$$

Дифференцируя уравнение эллипса, получим

$$y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

$$y'^2 = \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}$$

$$y'' = \frac{1}{2} \frac{dy'^2}{dy} = -\left(\frac{b^4 x^2}{a^4 y^3} - \frac{b^4 x}{a^4 y^2 y'}\right) = -\frac{b^2}{a^2 y} \left(1 + \frac{b^2 x^2}{a^2 y^2}\right) = -\frac{b^4}{a^2 y^3}$$

Откуда

Ответ:

$$R = \frac{1}{a^4 b} \left(a^4 - (a^2 - b^2)x^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

С4<sup>0.50</sup>

Найдите силу взаимодействия частицы со спицей в её точках пересечения с прямой  $x = 0$ . Ответ выразите через  $m$ ,  $q$ ,  $v_0$ ,  $L$ ,  $\rho$ ,  $\varphi$  и физические постоянные.

Из второго закона Ньютона

$$\frac{mv_0^2}{R} + F = N$$

где  $F = qE$  – сила электростатического взаимодействия частицы со стержнем.

При  $x = 0$  радиус кривизны

$$R = \frac{b^2}{a},$$

электрическое поле направлено вдоль оси  $Oy$  и равно (с учетом  $y = b$ )

$$E = \int_{-L}^L dx \frac{k\rho}{x^2 + b^2} \cdot \frac{b}{\sqrt{x^2 + b^2}} = \frac{2k\rho L}{b\sqrt{x^2 + b^2}}$$

Интеграл можно взять с помощью замены  $x = b \tan \theta$ .

Окончательно для силы получаем

$$N = \frac{mv_0^2 b}{a^2} + \frac{2kqL\rho}{b\sqrt{b^2 + L^2}}.$$

Подставим выражения для полуосей

Ответ:

$$N = \frac{mv_0^2}{L} \frac{\sinh \frac{\varphi_0}{2k\rho}}{\cosh^2 \frac{\varphi_0}{2k\rho}} + \frac{2kq\rho}{L} \sinh \frac{\varphi_0}{2k\rho} \tanh \frac{\varphi_0}{2k\rho}.$$

C5 0.50

Найдите силу взаимодействия частицы со спицей в её точках пересечения с прямой  $y = 0$ . Ответ выразите через  $m, q, v_0, L, \rho, \varphi$  и физические постоянные.

Аналогично предыдущему пункту при  $y = 0$  имеем  $x = a$  и радиус кривизны

$$R = \frac{a^2}{b} \text{ для } x = 0$$

Значение электрического поля в этой точке

$$E = k\rho \int\limits_{a-L}^{a+L} \frac{dr}{r^2} = k\rho \left( \frac{1}{a-L} - \frac{1}{a+L} \right) = \frac{2k\rho L}{a^2 - L^2}.$$

Тогда сила

$$N = qE + mv^2/R = N = \frac{mv_0^2 a}{b^2} + \frac{2kq\rho L}{a^2 - L^2}$$

и окончательно

Ответ:

$$N = \frac{mv_0^2}{L} \sinh \frac{\varphi_0}{2k\rho} \cosh \frac{\varphi_0}{2k\rho} + \frac{2kq\rho}{L} \sinh^2 \frac{\varphi_0}{2k\rho}.$$