

A1 ^{0.30} Найдите вектор угловой скорости второго стержня в начальный момент времени. Ответ выразите через $\vec{\omega}$.

В момент начала вращения шарик на конце второго стержня неподвижен. Поэтому стержни начинают вращаться в противоположных направлениях. Поскольку шарики покоятся и длины стержней одинаковы

$$\vec{\omega}_2 = -\vec{\omega}_1$$

A2 ^{0.20} В начальный момент времени найдите вектор угловой скорости $\vec{\omega}_{\text{отн}}$ второго стержня в системе отсчёта, связанной с первым стержнем. Ответ выразите через $\vec{\omega}$

Из закона сложения угловых скоростей

$$\vec{\omega}_{\text{отн}} = \vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1$$

Комбинируя равенство с результатом пункта **A1**

$$\vec{\omega}_{\text{отн}} = -2\vec{\omega}$$

A3 ^{0.50} Найдите потенциальную энергию груза в поле центробежной силы на расстоянии r от оси вращения с точностью до произвольной постоянной. Ответ выразите через m, ω, r .

Потенциальная энергия может быть получена как потенциальная энергия пружины с коэффициентом жёсткости $-m\omega^2$. Отсюда

$$W_p = -\frac{m\omega^2 r^2}{2} + C$$

В дальнейшем константу будем считать равной нулю.

A4 ^{0.50} Пусть второй стержень повернулся на угол φ относительно первого. Найдите его угловую скорость $\omega_{\text{отн}}$ в данном положении. Ответ выразите через ω и φ .

Как и говорилось ранее, сила Кориолиса не меняет кинетическую энергию системы. Тогда в системе выполняется закон сохранения механической энергии

$$W_k + W_p = E$$

В начальный момент времени

$$2m\omega^2 L^2 = W_k$$

$$-2m\omega^2 L^2 = W_p$$

Таким образом

$$E = 0$$

В произвольный момент времени

$$W_k = \frac{m\omega_{\text{отн}}^2 L^2}{2}$$

$$W_p = -2m\omega^2 L^2 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

Откуда

$$\vec{\omega}_{\text{отн}} = -2\vec{\omega} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

A5 ^{0.50} Найдите скорость груза в неподвижной системе отсчёта. Ответ выразите через ω, L, φ .

Одна составляющая скорости будет направлена вдоль второго стержню, а другая - перпендикулярно ему. Получим

$$v_1 = \omega L \sin(\varphi)$$

$$v_2 = \omega L(1 + \cos(\varphi)) - \omega_{\text{отн}} L$$

Для квадрата скорости получим

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2 = (2\omega L)^2 \left(\left(\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right)^2 + \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right)$$

Откуда после простых преобразований

$$v = 2\omega L \sqrt{2 \left(\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \cos^3\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right)}$$

В1^{0.40}

Обозначим силу натяжения стержней за T

Найдите ускорения грузов $a_{1л}, a_{1п}$ в проекции на ось OX и ускорение шарнира a_2 в проекции на ось OY . Ответы выразите через m, g, T и φ .

$$a_{1лx} = \frac{T \cos(\varphi)}{m}$$

$$a_{1пx} = -\frac{T \cos(\varphi)}{m}$$

$$a_{2y} = -\left(\frac{T \sin(\varphi)}{m} + g \right)$$

В2^{0.60}

В указанном положении найдите скорости грузов v_1 и скорость шарнира v_2 .

Из закона сохранения механической энергии

$$\frac{2m}{2}(v_1^2 + v_2^2) = 2m \left(\frac{v_0^2}{2} - gL \sin(\varphi) \right)$$

Уравнение кинематической связи

$$v_1 = v_2 \tan(\varphi)$$

Откуда

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gL \sin(\varphi)} \sin(\varphi)$$

$$v_2 = \sqrt{v_0^2 - 2gL \sin(\varphi)} \cos(\varphi)$$

В3^{1.00}

Запишите уравнение движения шарнира относительно любого из грузов, связывающее v_1, v_2, a_1, a_2, L и φ

Относительно грузов шарнир движется по окружности. Отсюда

$$\frac{v_{\text{отн}}^2}{L} = a_{1лx} \cos(\varphi) - a_{2y} \sin(\varphi)$$

Поскольку скорости шарнира и грузов перпендикулярны

$$v_{\text{отн}}^2 = v_1^2 + v_2^2$$

и окончательно

$$\frac{v_1^2 + v_2^2}{L} = a_{1лx} \cos(\varphi) - a_{2y} \sin(\varphi)$$

В4^{0.70}

Найдите силу натяжения T из уравнения, полученного в пункте В3. Ответ выразите через m, v_0, g, L, φ

Комбинируя результаты первых трёх пунктов

$$\left(\frac{v_0^2}{L} - 2g \sin(\varphi) \right) = \frac{T}{m} + g \sin(\varphi)$$

откуда

$$T = m \left(\frac{v_0^2}{L} - 3g \sin(\varphi) \right)$$

B5 1.00

Предположим, что в некоторый момент грузы отрываются от поверхности.

Найдите значение угла $\varphi_{\text{отр}}$ в этот момент времени.

Условие, при котором грузы отрываются от поверхности

$$T \sin(\varphi) = mg$$

Подставляя ответ на пункт B4

$$m \left(\frac{v_0^2}{L} - 3g \sin(\varphi) \right) \sin(\varphi) = mg$$

откуда

$$3 \sin^2(\varphi) - \frac{v_0^2}{gL} \sin(\varphi) + 1 = 0$$

Найдём корни квадратного уравнения

$$\sin(\varphi) = \frac{\frac{v_0^2}{gL} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{gL}\right)^2 - 12}}{6}$$

Первым достигается меньший корень, а потому окончательный ответ

$$\sin(\varphi) = \frac{\frac{v_0^2}{gL} - \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{gL}\right)^2 - 12}}{6}$$

B6 0.50

Найдите минимальное значение v_0 , при котором грузы оторвутся от поверхности и значение угла φ' в момент отрыва

Дискриминант квадратного уравнения должен быть неотрицателен, откуда

$$v_0 \geq \sqrt{2\sqrt{3}gL}$$

Минимум достигается в случае нулевого дискриминанта, поэтому

$$\sin(\varphi_{\max}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

C1 0.20

При каких значениях R столкновение оболочек происходит раньше их отрыва от поверхности под действием стержней? Ответ выразите через $L, \varphi_{\text{отр}}$,

Условие, при котором столкновение произойдёт раньше отрыва

$$R \geq L \cos(\varphi)$$

C2 1.00

Пусть сразу после столкновения проекции скорости груза на оси OX и OY равны v_{1x} и v_{1y} соответственно.

Выразите проекцию скорости шарнира на вертикальную ось v_{2y} через v_{1x}, v_{1y} и φ_0 .

Груз движется по окружности относительно шарнира, поэтому

$$\pm v_{1x} = (v_{1y} - v_{2y}) \tan(\varphi_0)$$

$$v_{2y} = v_{1y} \pm \frac{v_{1x}}{\tan(\varphi_0)}$$

СЗ 1.30 Найдите скорость шарнира v_2 сразу после соударения. Ответ выразите через v_0, g, L, R

Решим задачу в системе отсчёта центра масс. Пусть v_x и v_y - модуль относительной скорости грузов и модуль скорости груза относительно шарнира по вертикали соответственно. Тогда выражение для кинетической энергии в системе отсчёта центра масс следующее

$$\frac{mv_x^2}{4} + \frac{mv_y^2}{2} = W_k$$

После соударения это также выполняется.

Из уравнения кинематической связи

$$\frac{v_x}{v_y} = tg(\varphi_0)$$

Сразу после соударения это соотношение также выполняется. Поэтому, из закона сохранения энергии следует, что после соударения модули относительных скоростей остаются постоянными. Это говорит о том, что грузы обмениваются друг с другом горизонтальными составляющими скоростей, а шарнир обменивается с ними вертикальными составляющими скоростей. Таким образом, при соударении шарнир останавливается.

$$v_2 = 0$$

С4 1.30 Найдите модуль скоростей грузов v_1 сразу после соударения. Ответ выразите через v_0, g, L, R

Вся кинетическая энергия переходит к грузам. Из закона сохранения энергии получаем ответ

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2g\sqrt{L^2 - R^2}}$$