

A1 0.80 Найдите ускорение нижнего конца цепи, если известно, что оно постоянно.

Спустя время t после начала движения свисающий отрезок цепи имеет длину $\frac{at^2}{2}$ и падает со скоростью at . Запишем второй закон Ньютона в импульсной форме:

$$\frac{at^2}{2} \cdot \lambda \cdot g \cdot dt = d \left(\frac{at^2}{2} \cdot \lambda \cdot at \right) = \frac{a^2 \lambda}{2} \cdot 3t^2 \cdot dt,$$

и после сокращений получаем ответ:

Ответ: $a = \frac{g}{3}$

B1 0.30 Считая, что потери механической энергии звеньев происходят только при ударе их о пол, а всё предыдущее время механическая энергия сохраняется, найдите скорость v установившегося равномерного движения цепи.

Запишем ЗСЭ для некоторого отрезка цепи: сначала он лежит на столе, потом падает вблизи пола: $dm \cdot g \cdot h = dm \cdot \frac{v^2}{2}$.

Ответ: $v = \sqrt{2gh}$

B2 0.50 Чему равно натяжение цепи T_f в точках, подлетающих к полу? Каково натяжение цепи $T(h)$ в точках, находящихся на h выше уровня пола? Одинаково ли натяжение в находящихся на одинаковой высоте точках левого и правого отрезков цепи?

Натяжение в близких полу точках удерживает лишь расположенные ниже звенья, поэтому оно стремится к нулю при приближении к полу: $T_f = 0$. Зависимость $T(h)$ можно получить, записывая равенство сил, действующих на вертикальный отрезок цепи высоты h : $T(h) = \lambda gh$. Натяжение цепи на одинаковой высоте слева и справа от блока одинаковое (из условия равенства моментов сил, действующих на лежащую на блоке часть цепи).

Ответ: $T_f = 0$
 $T(h) = \lambda gh$
слева и справа одинаково

B3 0.50 Запишите закон изменения импульса и рассчитайте силу натяжения T_t в точках цепи, близких к уровню стола. Ответ выразите с использованием v .

Сила T_t ускоряет отрывающиеся от стола звенья цепи. Запишем закон изменения импульса: $T_t \cdot dt = (\lambda \cdot v dt) \cdot v$.

Ответ: $T_t = \lambda v^2$

B4 0.20 Опираясь на результаты пунктов B2 и B3, выразите искомую скорость v .

Сила T_t выражена двумя способами: $T_t = \lambda v^2 = \lambda gh$, откуда следует ответ (в $\sqrt{2}$ раз отличающийся от полученного через ЗСЭ):

Ответ: $v = \sqrt{gh}$

B5 0.20 Какая механическая энергия за единицу времени $\frac{\Delta W_f}{\Delta t}$ переходит в тепло при неупругих ударах упавших звеньев о пол?

За время dt в тепло переходит кинетическая энергия звеньев, долетевших до пола за это время:

$$\frac{\Delta W_f}{\Delta t} = \frac{(\lambda \cdot v \cdot dt) \cdot v^2}{dt}$$

Ответ: $\frac{\Delta W_f}{\Delta t} = \frac{\lambda v^3}{2} = \frac{\lambda \cdot (gh)^{3/2}}{2}$

B6 ^{0.50} Рассчитайте потери механической энергии за единицу времени $\frac{\Delta W_t}{\Delta t}$ при неупругих ударах новых звеньев об уже взлетевшие.

В предложенной авторами системе отсчета за время dt к покоящейся цепи добавляется изначально двигавшийся вниз со скоростью v отрезок цепи, его длина $v \cdot dt$. В тепло переходит его кинетическая энергия:

$$\frac{\Delta W_t}{\Delta t} = \frac{(\lambda \cdot v \cdot dt) \cdot v^2}{dt}.$$

Таким образом, описания потерь энергии на столе и на полу в точности совпадают.

Ответ: $\frac{\Delta W_t}{\Delta t} = \frac{\lambda v^3}{2} = \frac{\lambda \cdot (gh)^{3/2}}{2}$

B7 ^{0.10} Найдите отношение $\frac{\Delta W_t}{\Delta W_f}$ потерь энергии на столе и на полу.

Ответ: $\frac{\Delta W_t}{\Delta W_f} = 1$

B8 ^{0.20} Если рассмотреть одни и те же звенья ДО их отрыва от стола и ПОСЛЕ их преземления на пол, то можно рассчитать изменение их потенциальной энергии. Покажите, что оно совпадает с суммой потерь на столе и на полу.

Ответ: $\frac{\Delta E_{\text{пот}}}{\Delta t} = \frac{(\lambda \cdot v \cdot dt) \cdot g \cdot h}{dt} = \lambda \cdot (gh)^{3/2} = \frac{\Delta W_f}{\Delta t} + \frac{\Delta W_t}{\Delta t}$

C1 ^{0.20} По аналогии с пунктами B2 и B3 запишите выражения для сил натяжения цепи в разных точках: T_t (над столом), T_c (в петле вблизи потолка), T_f (вблизи пола).

Ответ: $T_t = \lambda v^2 = \lambda g h_1$
 $T_c = \lambda g(h_1 + h_2)$
 $T_f = 0$

C2 ^{0.40} Объединив записанные выражения с законом изменения импульса, решите систему уравнений и получите выражения для v и для предполагаемой высоты «фонтана» h_2 .

Сила натяжения в верхней точке петли - единственная сила, сообщающая горизонтальный импульс звеньям из левой части дуги. Поэтому она рассчитывается так же, как ранее вычислена сила T_t :

$$T_c = \lambda v^2.$$

Получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} T_t = \lambda v^2 = \lambda g h_1 \\ T_c = \lambda v^2 = \lambda g(h_1 + h_2) \end{cases}$$

Решая систему, получаем ответы, из которых следует невозможность «фонтана» в выбранной модели:

Ответ: $v = \sqrt{gh_1}$
 $h_2 = 0$

C3 ^{0.20} Чему равны коэффициенты α и β в упрощенной модели, рассмотренной ранее в пункте C1?

Ответ: $\alpha = \beta = 0$

C4 ^{0.60} В описанных новых предположениях повторите выкладки, аналогичные пункту C2, и получите выражения для $\frac{h_2}{h_1}$ и для отношения $\frac{E_{\text{кин}}}{E_{\text{пот}}}$ кинетической энергии летящего звена к его начальной потенциальной энергии (отсчитываемой от уровня пола).

$$\begin{cases} T_c = \lambda v^2 = \beta \lambda v^2 + \lambda g(h_1 + h_2) \\ T_t + R = \lambda v^2 = (\beta \lambda v^2 + \lambda g h_1) + \alpha \lambda v^2 \end{cases}$$

Решая систему и учитывая, что $E_{\text{пот}} = dm \cdot g \cdot h_1$, получаем ответы:

Ответ: $\frac{h_2}{h_1} = \frac{\alpha}{1 - \alpha - \beta}$
 $\frac{E_{\text{кин}}}{E_{\text{пот}}} = \frac{1}{2(1 - \alpha - \beta)}$

C5 ^{0.60} Какому условию должны удовлетворять α и β , чтобы не нарушался закон сохранения энергии? При каких значениях α_0 и β_0 достигается максимальная допустимая высота «фонтана»? Чему равны соответствующие этой оценке отношения $\left(\frac{h_2}{h_1}\right)_{\text{max}}$ и $\left(\frac{E_{\text{кин}}}{E_{\text{пот}}}\right)_{\text{max}}$?

Для выполнения ЗСЭ необходимо, чтобы $\frac{E_{\text{кин}}}{E_{\text{пот}}} \leq 1$, что преобразуется в условие $\alpha + \beta \leq \frac{1}{2}$. В рамках этого ограничения отношение высот $\frac{h_2}{h_1} = \frac{\alpha}{1 - \alpha - \beta}$ будет максимальным при $\alpha = \frac{1}{2}$ и $\beta = 0$.

Ответ: $\left(\frac{h_2}{h_1}\right)_{\text{max}} = 1$
 $\left(\frac{E_{\text{кин}}}{E_{\text{пот}}}\right)_{\text{max}} = 1$

D1 ^{0.20} По графику рассчитайте экспериментальный коэффициент $\left(\frac{h_2}{h_1}\right)_{\text{exp}}$.

Ответ: $\left(\frac{h_2}{h_1}\right)_{\text{exp}} \approx 0.137$

E1 ^{1.10} Рассчитайте, какая сила R должна подействовать на левый конец звена для возникновения такого движения. Ответ выразите через m, b, I, λ .

Система уравнений, описывающих вращательное и поступательное движение стержня:

$$\begin{cases} T_t + R = m \cdot a_c \\ T_t \cdot b = \left(I + m\left(\frac{b}{2}\right)^2\right) \cdot \frac{a_c}{b/2} \\ T_t + R = \lambda v^2 \end{cases}$$

Избавляясь от переменных T_t и a_c , получаем ответ:

Ответ: $R = \lambda v^2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{2I}{mb^2}\right)$

E2 ^{0.30} Считая, что цепь - соединенные друг с другом «штырьки» (т.е. звенья - тонкие цилиндры), рассчитайте $\alpha_{\text{шт.}}$ - численное значение коэффициента, введенного ранее соотношением $R = \alpha \lambda v^2$. Примите $\beta \approx 0$ и найдите $\left(\frac{h_2}{h_1}\right)_{\text{шт.}}$.

Из пункта E1 следует выражение $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{2I}{mb^2}$. Момент инерции «штырька» относительно описанной в условии оси равен $I_{\text{шт.}} = \frac{mb^2}{12}$. Таким образом, мы можем вычислить $\alpha_{\text{шт.}}$, а затем через $\beta = 0$ и найденную α рассчитать $\left(\frac{h_2}{h_1}\right)_{\text{шт.}} = \frac{\alpha_{\text{шт.}}}{1 - \alpha_{\text{шт.}} - \beta}$.

Ответ: $\alpha_{\text{шт.}} = \frac{1}{3}$
 $\left(\frac{h_2}{h_1}\right)_{\text{шт.}} = \frac{1}{2}$

E3 ^{0.30} Считая теперь звенья тонкими обручами, рассчитайте $\alpha_{\text{обр.}}$. Примите $\beta \approx 0$ и найдите $\left(\frac{h_2}{h_1}\right)_{\text{обр.}}$.

$$I_{\text{обр.}} = \frac{mR^2}{2} = \frac{mb^2}{8}$$

Ответ: $\alpha_{\text{обр.}} = \frac{1}{4}$
 $\left(\frac{h_2}{h_1}\right)_{\text{обр.}} = \frac{1}{3}$

E4 ^{0.30} Рассчитайте α_3 . Примите $\beta \approx 0$ и найдите $\left(\frac{h_2}{h_1}\right)_3$.

$$I_3 = \frac{mb^2}{6}$$

Ответ: $\alpha_3 = \frac{1}{6}$
 $\left(\frac{h_2}{h_1}\right)_3 = \frac{1}{5}$

F1 ^{1.00} Записав второй закон Ньютона в проекции на касательную к цепочке и на перпендикуляр к ней, получите систему дифференциальных уравнений, связывающих функции $T(s)$, $\theta(s)$ и содержащих постоянные λ и g . Решать систему не требуется.

В проекции на касательную:

$$(T + dT) = T \pm ds \cdot \lambda \cdot g \cdot \sin \theta$$

(знак «плюс» соответствует отсчету углов по часовой стрелке, «минус» - против часовой).

В проекции на нормаль:

$$T \cdot d\theta = ds \cdot \lambda \cdot g \cdot \cos \theta.$$

Преобразуем в дифференциальные уравнения:

Ответ:

$$\begin{cases} \frac{dT}{ds} = \pm \lambda \cdot g \cdot \sin \theta \\ T \cdot \frac{d\theta}{ds} = \lambda \cdot g \cdot \cos \theta \end{cases}$$

F2 ^{1.00} Аналогично пункту F1, запишите систему дифференциальных уравнений, связывающих функции $T(s)$ и $\theta(s)$ для линии «фонтана». Решать систему не требуется.

В проекции на касательную:

$$(T + dT) = T \pm ds \cdot \lambda \cdot g \cdot \sin \theta$$

(знак «плюс», по-прежнему, соответствует отсчету углов по часовой стрелке).

В проекции на нормаль сумма сил должна обеспечить центростремительное ускорение движущегося отрезка ds цепи:

$$ds \cdot \lambda \cdot g \cdot \cos \theta + T \cdot (-d\theta) = \frac{v^2}{R} \cdot \lambda \cdot ds.$$

Получим выражение для радиуса траектории:

$$(-d\theta) \cdot R = ds$$
$$\frac{1}{R} = \frac{(-d\theta)}{ds}.$$

Объединим выписанные выражения и преобразуем их в дифференциальные уравнения:

Ответ:

$$\begin{cases} \frac{dT}{ds} = \pm \lambda \cdot g \cdot \sin \theta \\ (T - \lambda v^2) \cdot \frac{d\theta}{ds} = \lambda \cdot g \cdot \cos \theta \end{cases}$$

F3^{0.50} Пусть $T(s)$ - натяжение в линии фонтана, т.е. функция, удовлетворяющая уравнениям из пункта F2. Функция $(T(s) - \tau)$ удовлетворяет системе уравнений для цепной линии из пункта F1 при некотором значении постоянной τ . Выразите τ .

Немного преобразуем систему уравнений из пункта F2:

$$\begin{cases} \frac{dT}{ds} = \frac{d(T - \lambda v^2)}{ds} = \pm \lambda \cdot g \cdot \sin \theta \\ (T - \lambda v^2) \cdot \frac{d\theta}{ds} = \lambda \cdot g \cdot \cos \theta \end{cases}$$

Видим, что решением этой системы уравнений будут такие функции $T(s)$, что функции $(T(s) - \lambda v^2)$ удовлетворят уравнениям для цепной линии. Таким образом, искомая постоянная (не зависящая от выбора направления отсчета θ):

Ответ: $\tau = \lambda v^2$