

A1 ^{1.00} Пусть $v(x)$ – скорость течения жидкости в щели. Начало координат оси Ox находится посередине между плоскостями, а плоскости, ограничивающие течение, находятся при $x = \pm d/2$. Разность давлений на противоположных краях щели равна ΔP . Рассматривая силы, действующие на бесконечно малый слой жидкости толщины dx , получите дифференциальное уравнение на $v(x)$. Найдите из него $v(x)$. На стенках щели скорость обращается в 0. Найдите среднюю скорость течения жидкости $\langle v \rangle$ (выразите ее через $\Delta P, L, \eta, d$). Найдите поток (поток – объем жидкости, протекающий через щель в единицу времени) жидкости через щель. Выразите ответ через $\Delta P, L, \eta, d, w$.

Скорость течения жидкости постоянна, поэтому сумма силы давления и силы вязкого трения, действующей на слой жидкости толщины dx должна быть равна нулю, откуда получаем уравнение

$$\eta \frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{\Delta P}{L},$$

его решение, удовлетворяющее правильным граничным условиям

$$v(x) = \frac{\Delta P}{2\eta L} \left(\frac{d^2}{4} - x^2 \right).$$

Интегрируя, находим среднюю скорость

$$\langle v \rangle = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} dx v(x) = \frac{\Delta P d^2}{12\eta L}$$

и поток

$$q = dw \langle v \rangle = \frac{d^3 w}{12\eta L} \Delta P.$$

Ответ:

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta P d^2}{12\eta L}, \quad q = \frac{d^3 w}{12\eta L} \Delta P.$$

A2 ^{0.80} Теперь рассмотрим течение жидкости через длинную круглую трубку длины L и радиуса r . Из соображений симметрии скорость при течении через трубку зависит только от расстояния до ее оси. На границе трубки скорость обращается в 0. Найдите зависимость скорости от расстояния до оси ρ . Разность давлений на между концами трубки ΔP , вязкость жидкости η .

Найдите объемный расход q при течении жидкости через трубку. Ответ выразите через $\Delta P, L, r, \eta$.

Приравнивая нулю силу, действующую на цилиндр жидкости радиуса ρ , находим уравнение

$$2\pi\rho \frac{dv}{d\rho} \eta L = -\pi\rho^2 \Delta P, \quad \frac{dv}{d\rho} = -\rho \frac{\Delta P}{2\eta L}.$$

Его решение

$$v(\rho) = \frac{\Delta P}{4\eta L} (r^2 - \rho^2),$$

откуда поток равен

$$q = \int_0^r 2\pi\rho d\rho v(\rho) = \frac{\pi r^4 \Delta P}{8\eta L}.$$

Ответ:

$$q = \frac{\pi r^4 \Delta P}{8\eta L}$$

A3 ^{0.20} Найдите гидродинамические сопротивления щели R_s и трубки R_t . Ответ выразите через геометрические размеры, заданные в пунктах A1 и A2 соответственно и через вязкость жидкости η .

Используя результаты предыдущих пунктов, получим

Ответ:

$$R_s = \frac{12\eta L}{d^3 w}, \quad R_t = \frac{8\eta L}{\pi r^4}$$

A4^{0.70}

Жидкость вязкости η течет по трубке радиуса r и длины L под действием разности давлений ΔP (как в A2). Найдите мощность сил вязкого трения.

Работа сил вязкого трения равна по модулю и противоположна по знаку работе сил давления (жидкость движется равномерно, поэтому полная работа равна нулю).

Сила давления, действующая на узкий цилиндр жидкости площади dS (ось цилиндра параллельна направлению движения жидкости) равна $F = \Delta P dS$.

Соответствующий вклад в мощность $dW = \Delta P dS v$, а полная мощность сил трения

$$W = - \int \Delta P v dS = -\Delta P q.$$

$$W = -q\Delta P = -\Delta P^2/R = -\frac{\pi r^4}{8\eta L}\Delta P^2$$

Альтернативно можно использовать факт, что в бесконечно малом объеме мощность сил вязкого трения $dW = -dV\eta(dv/d\rho)^2$.

Интегрируя по объему, найдем

$$W = \int dV\eta(dv/d\rho)^2 = -\eta L \int_0^r d\rho 2\pi\rho(dv/d\rho)^2 = -\frac{\pi r^4}{8\eta L}\Delta P^2.$$

Ответ:

$$W = -\frac{\pi r^4}{8\eta L}\Delta P^2$$

B1^{0.40}

Пусть заданы объемные расходы q_1 и q_2 жидкостей 1 и 2, а также их средние скорости $\langle v_1 \rangle$ и $\langle v_2 \rangle$. Найдите относительную ширину потока образца w_1/w .

Напишем выражения для потоков жидкостей через их средние скорости и ширины потоков:

$$q_1 = \langle v_1 \rangle dw_1, \quad q_2 = \langle v_2 \rangle dw_2 = \langle v_2 \rangle d(w - w_1).$$

Решая полученные уравнения, находим

$$\frac{q_2}{q_1} = \frac{\langle v_2 \rangle}{\langle v_1 \rangle} \left(\frac{w}{w_1} - 1 \right), \quad \frac{w_1}{w} = \frac{1}{1 + q_2 \langle v_1 \rangle / q_1 \langle v_2 \rangle}.$$

Ответ:

$$\frac{w_1}{w} = \frac{1}{1 + q_2 \langle v_1 \rangle / q_1 \langle v_2 \rangle}$$

B2^{0.40}

Пусть заданы вязкости жидкостей η_1 и η_2 , а их средние скорости определяются результатами части A. Выразите w_1/w через q_1 , q_2 , η_1 и η_2 . Эффектами, которые происходят на границе между жидкостями 1 и 2, можно пренебречь, так как они важны только в области шириной порядка $d \ll w$.

Из формул для средних скоростей

$$\frac{\langle v_1 \rangle}{\langle v_2 \rangle} = \frac{\eta_2}{\eta_1}$$

Ответ:

$$\frac{w_1}{w} = \frac{1}{1 + q_2 \eta_2 / q_1 \eta_1}$$

B3 ^{0.30} Найдите отношение потоков q_1/q_2 , если заданы плотности жидкостей (ρ_1 и ρ_2), их вязкости (η_1 и η_2) и высоты, на которые подняты резервуары h_1 и h_2 .

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{\rho_1 g h_1 / R_1}{\rho_2 g h_2 / R_2} = \frac{\rho_1 h_1}{\rho_2 h_2} \frac{R_2}{R_1} = \frac{\rho_1 h_1 \eta_2}{\rho_2 h_2 \eta_1}$$

Ответ:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{\rho_1 h_1 \eta_2}{\rho_2 h_2 \eta_1}$$

B4 ^{0.30} Найдите соответствующее отношение ширин потоков w_1/w .

Ответ:

$$\frac{w_1}{w} = \frac{1}{1 + \rho_2 h_2 / \rho_1 h_1}$$

C1 ^{0.40} Опять рассмотрим течение одной жидкости между плоскостями. Однако теперь скорость создается не только за счет разности давлений, но и за счет силы тяжести. Геометрия такая же как и в части A1, сила тяжести направлена вдоль оси y . Поток жидкости сонаправлен с силой тяжести. Найдите среднюю скорость жидкости. Выразите ответ через $\rho, g, \eta, d, \Delta P, L$.

Без учета гравитации

$$\langle v \rangle = \frac{d^2}{12\eta L} \Delta P.$$

За счет гравитации возникает дополнительный вклад в разность давлений

$$\Delta P \rightarrow \Delta P + \rho g L.$$

Отсюда скорость

Ответ:

$$\langle v \rangle = \frac{d^2}{12\eta} \left(\frac{\Delta P}{L} + \rho g \right)$$

C2 ^{0.80} Пусть теперь между плоскостями течет два типа жидкостей, как в части B. Написав выражения для средних скоростей жидкостей 1 и 2, исключите из них разность давлений (она одинакова для обеих жидкостей) найдите отношение $\langle v_1 \rangle / \langle v_2 \rangle$. Выразите ответ через $\langle v_2 \rangle, \eta_1, \eta_2, d, g, \rho_1, \rho_2$.

Запишем выражения для средних скоростей двух жидкостей

$$\langle v_1 \rangle = \frac{d^2}{12\eta_1} \left(\frac{\Delta P}{L} + \rho_1 g \right), \quad \langle v_2 \rangle = \frac{d^2}{12\eta_2} \left(\frac{\Delta P}{L} + \rho_2 g \right).$$

Умножим эти уравнения на соответствующие вязкости и вычтем одно из другого

$$\eta_1 \langle v_1 \rangle - \eta_2 \langle v_2 \rangle = \frac{g d^2}{12} (\rho_1 - \rho_2).$$

Разделив на $\eta_1 \langle v_2 \rangle$ получим

$$\frac{\langle v_1 \rangle}{\langle v_2 \rangle} - \frac{\eta_2}{\eta_1} = \frac{g d^2}{12 \eta_1 \langle v_2 \rangle} (\rho_1 - \rho_2)$$

откуда

Ответ:

$$\frac{\langle v_1 \rangle}{\langle v_2 \rangle} = \frac{\eta_2}{\eta_1} \left(1 + \frac{gd^2}{12\eta_2 \langle v_2 \rangle} (\rho_1 - \rho_2) \right)$$

С3 ^{1.00} Подставьте выражение для средних скоростей в формулу для относительной ширины сфокусированного потока из В1. Получите уравнение для определения ширины вида

$$\frac{w}{w_1} = \dots$$

В правую часть могут входить отношение $\frac{w_1}{w}$ и безразмерные параметры $\alpha = q_2\eta_2/q_1\eta_1$, $\beta = (\rho_1 - \rho_2)q_G/\rho_2q_2$. Здесь $q_G = \rho_2gd^3w/12\eta_2$ – величина с размерностью потока жидкости, характеризующая влияние гравитации.

Используем соотношение из В1

$$\frac{w}{w_1} = 1 + q_2\langle v_1 \rangle/q_1\langle v_2 \rangle.$$

Подставим в него найденное ранее отношение скоростей

$$\frac{w}{w_1} = 1 + \frac{q_2\eta_2}{q_1\eta_1} \left(1 + \frac{gd^2}{12\eta_2 \langle v_2 \rangle} (\rho_1 - \rho_2) \right).$$

Выразим среднюю скорость $\langle v_2 \rangle$ через соответствующий поток:

$$\langle v_2 \rangle = \frac{q_2}{dw_2} = \frac{q_2}{d(w - w_1)}.$$

Тогда

$$\frac{w}{w_1} = 1 + \frac{q_2\eta_2}{q_1\eta_1} \left(1 + \frac{gd^3}{12\eta_2q_2} (\rho_1 - \rho_2)(w - w_1) \right).$$

Преобразуем это выражение:

$$\frac{w}{w_1} = 1 + \frac{q_2\eta_2}{q_1\eta_1} \left(1 + \frac{gd^3w}{12\eta_2q_2} (\rho_1 - \rho_2)\frac{w - w_1}{w} \right) =$$

$$1 + \alpha \left(1 + \frac{q_G(\rho_1 - \rho_2)}{q_2\rho_2} \left(1 - \frac{w_1}{w} \right) \right) = 1 + \alpha \left(1 + \beta \left(1 - \frac{w_1}{w} \right) \right).$$

Ответ:

$$\frac{w}{w_1} = 1 + \alpha \left(1 + \beta \left(1 - \frac{w_1}{w} \right) \right).$$

С4 ^{0.60} Решите это уравнение и найдите относительную ширину сфокусированного потока w_1/w . Ответ выразите через безразмерные величины α , β .

Получили квадратное уравнение

$$\alpha\beta\frac{w_1^2}{w^2} - (1 + \alpha + \alpha\beta)\frac{w_1}{w} + 1 = 0.$$

Его решение (нужный нам корень должен быть меньше 1, поэтому берем знак -)

Ответ:

$$\frac{w_1}{w} = \frac{1}{2\alpha\beta} \left(1 + \alpha + \alpha\beta - \sqrt{(1 + \alpha + \alpha\beta)^2 - 4\alpha\beta} \right)$$

D1 ^{0.60} Найдите гидродинамическое сопротивление каждого из реостатов, если по ним течет вода. Пусть в качестве жидкости 1 используется раствор соли, плотность которого $\rho_1 = 1.15 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, а вязкость совпадает с вязкостью воды. Найдите q_G для такой щели.

Подставляем приведенные выше числа в формулы для сопротивления и q_G

$$R = \frac{8\eta L}{\pi r^4}, \quad q_G = \frac{\rho_2 g d^3 w}{12\eta_2}$$

Ответ:

$$R = 3.97 \cdot 10^{12} \text{ Па} \cdot \text{с} / \text{м}^3, \quad q_G = 1.48 \cdot 10^{-8} \text{ м}^3 / \text{с}.$$

D2 0.30 Найдите относительную ширину потока жидкости 1 (раствора соли)

w_1/w для случаев, когда жидкость 1 подается с высот $h_1 = 0.25 \text{ м}, 0.5 \text{ м}, 1.0 \text{ м}$.

Подставим числа в формулы, полученные в С4. Подставим числа в формулы из В4. Получим значения для $h = 0.25 \text{ м}, 0.5 \text{ м}, 1.0 \text{ м}$ соответственно:

Ответ:

$$\frac{w_1}{w} = 0.190; 0.346; 0.563.$$

D3 0.30 Как изменится значение ширины потока, если пренебречь влиянием силы тяжести? Вычислите относительную ширину потока для тех же параметров $h_1 = 0.25 \text{ м}, 0.5 \text{ м}, 1.0 \text{ м}$, что и в предыдущем пункте, не учитывая силу тяжести.

Подставим числа в формулы из В4. Получим значения для $h = 0.25 \text{ м}, 0.5 \text{ м}, 1.0 \text{ м}$ соответственно:

Ответ:

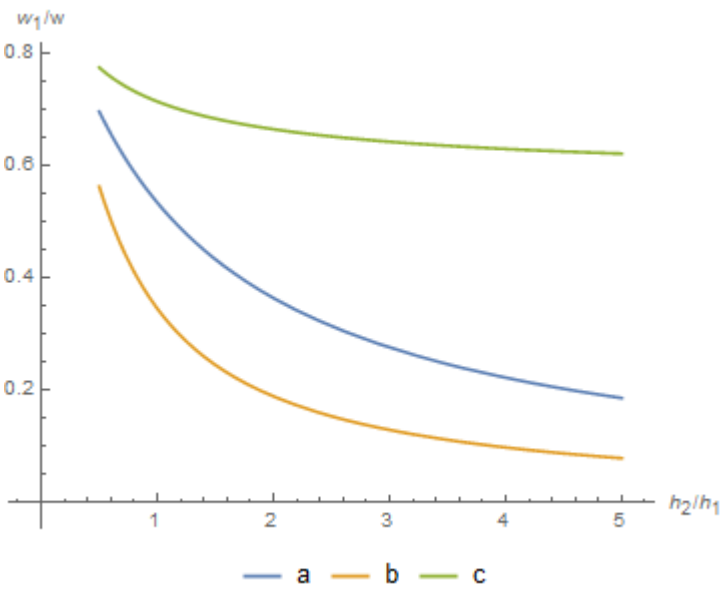
$$\frac{w_1}{w} = 0.365; 0.535; 0.697.$$

D4 0.30 Пусть теперь по центру течет некоторая жидкость 1, плотность которой равна $\rho'_1 = 0.8 \cdot 10^3 \text{ кг} / \text{м}^3$, а вязкость совпадает с вязкостью воды. Найдите отношение w_1/w для значений $h_1 = 0.25 \text{ м}, 0.5 \text{ м}, 1.0 \text{ м}$.

Ответ:

$$\frac{w_1}{w} = 0.666; 0.715; 0.775.$$

D5 0.80 Постройте качественно на одном графике зависимости w_1/w от h_2/h_1 для трех случаев: а) гравитации нет, б) по центру течет раствор соли, с) по центру течет жидкость с плотностью ρ'_1 . Все параметры как в предыдущих пунктах, высота h_2 фиксирована, меняется только h_1 .



На рисунке приведены графики для случаев а), б), с) соответственно. Обратите внимание, что все три зависимости монотонно убывают, а также на порядок расположения кривых (когда плотность центральной жидкости больше, поток становится уже после учета гравитации, а когда меньше – поток наоборот расширяется).

D6^{0.80} Во всех расчетах мы предполагали, что потоки не зависели от времени.

Пусть резервуар для воды (жидкости 2) представляет собой цилиндр радиуса $r_r = 20$ мм. Оцените время, за которое уровень воды в резервуаре уменьшается на $\delta h_2 = 10$ см. Если эксперимент провести за время такого порядка, изменение уровня воды в резервуаре практически на нем не скажется. Начальный уровень равен $h_2 = 0.5$ м.

Скорость уменьшения уровня воды можно оценить из

$$\pi r_r^2 \frac{dh_2}{dt} = -q_2 = -\frac{\rho_2 g h_2}{R}.$$

Считая эту скорость приближенно постоянной, находим

Ответ:

$$\Delta t \approx \frac{\pi r_r^2 \delta h_2 R}{\rho_2 g h_2} \approx 10^5 \text{ с}.$$