

A1^{0.50} Выразите c_V и c_P через r и γ . Найдите их значения.

Воспользуемся заданными в условии формулами

$$\begin{cases} c_P - c_V = r \\ c_P/c_V = \gamma \end{cases}$$

Ответ:

$$c_P = \frac{\gamma r}{\gamma - 1} = \frac{7}{2} r \approx 1005 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$$

Ответ:

$$c_V = \frac{r}{\gamma - 1} = \frac{5}{2} r \approx 718 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$$

A2^{0.50} Как зависит отношение давления в цилиндрической полости к атмосферному P_0/P_{atm} от веса платформы и геометрических параметров системы?

Из условия равновесия платформы получим

$$(P_0 - P_{atm}) \frac{\pi D^2}{4} = W,$$

откуда:

Ответ:

$$\frac{P_0}{P_{atm}} = 1 + \frac{4W}{P_{atm} \pi D^2} \approx 7,18$$

B1^{0.50} Выразите скорость движения возмущенной области газа v через c , ρ и ρ_0 .

Выделим мысленно область, ограниченную двумя положениями волнового фронта: в моменты времени t и $t + \Delta t$. Рассмотрим изменение массы газа в рассматриваемой области:

$$\begin{aligned} m(t) &= \rho_0 A c \Delta t \\ m(t + \Delta t) &= \rho A c \Delta t \end{aligned}$$

С другой стороны, суммарный поток массы (втекающий) через обе грани равен

$$\frac{dm}{dt} = \rho v A$$

откуда

$$\begin{aligned} m(t + \Delta t) - m(t) &= \frac{dm}{dt} \Delta t \\ (\rho - \rho_0) c &= \rho v \end{aligned}$$

Ответ:

$$v = c \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right)$$

B2^{1.00} Выразите разность давлений $P - P_0$ через ρ , ρ_0 , и c .

Из закона изменения импульса невозмущённой части газа получим

$$(P - P_0) A = \frac{dp}{dt} = v \frac{dm}{dt} = \rho_0 A c v$$

Подставляя выражение для v из предыдущего пункта, получим

Ответ:

$$(P - P_0) = \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) \rho_0 c^2$$

В3 0.50

Выразите c через γ, r, T .

$$c^2 = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{P - P_0}{\rho - \rho_0}$$

Поскольку давление газа должно изменяться непрерывно

$$c^2 = \frac{dP}{d\rho}$$

Течение газа считается адиабатическим, поэтому

$$P\rho^{-\gamma} = \text{const}$$

дифференцируя данное соотношение, получим

$$\frac{dP}{d\rho} = \gamma \frac{P}{\rho} = \gamma r T$$

и окончательно

Ответ:

$$c = \sqrt{\gamma r T}$$

В4 0.50

Рассчитайте скорость звука в воздухе при заданной температуре T_0 окружающей среды.

Ответ:

$$c_0 = \sqrt{\gamma r T_0} \approx 347 \text{ м/с}$$

В5 1.00

Выразите массовый расход dm/dt через $M, \gamma, T/T_0$ и соотношение $P_0 A \gamma / c_0$, где c_0 — скорость звука при температуре T_0 .

Выражение для массового расхода принимает вид

$$\frac{dm}{dt} = \rho A c M$$

Выразим ρ из уравнения Менделеева-Клапейрона

$$\frac{dm}{dt} = \frac{P A c M}{r T}$$

Комбинируя последнее выражение с результатом предыдущего пункта

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\gamma A M P}{c_0} \sqrt{\frac{T_0}{T}}$$

Поскольку процесс протекает адиабатически

$$T^\gamma P^{1-\gamma} = \text{const}$$

Откуда

$$P = P_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Подставим данное соотношение в выражение для $\frac{dm}{dt}$:

Ответ:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{P_0 A \gamma}{c_0} M \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

B6 0.50

Выразите скорость газа v через M, T, r и γ .

Ответ:

$$v = Mc = M\sqrt{\gamma r T}$$

B7 1.50

Используя уравнение Бернулли для сжимаемого газа в виде $\frac{v^2}{2} + c_P T = \text{const}$, найдите отношение температур T/T_0 через M и γ .

Подставляя полученные ранее выражения для v и c_P

$$rT \left(\frac{\gamma M^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \right) = \text{const}$$

или же

$$T((\gamma-1)M^2 + 2) = \text{const}$$

откуда

Ответ:

$$\frac{T}{T_0} = \frac{2}{2 + (\gamma-1)M^2}$$

C1 1.00

Выразите dm/dt через M, γ и $P_0 A \gamma / c_0$, и схематично нарисуйте эту зависимость от M для $M \in [0; 1]$. Найдите такое значение M , для которого поток достигает своего максимального значения (этот режим называется критическим).

Комбинируя результаты пунктов B5 и B7

$$\frac{dm}{dt} = \frac{P_0 A \gamma}{c_0} M \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

дифференцируя по M

$$1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 + \frac{M(\gamma+1)}{2(1-\gamma)} \cdot M(\gamma-1) = 0$$

откуда

Ответ:

$$M = 1$$

C2 1.00

Пусть компрессор выдает поток $5.0 \text{ м}^3/\text{мин}$. Рассчитайте значения ε, T, P, v и ρ выходного потока в критическом режиме.

Для критического режима

Ответ:

$$T = \frac{2T_0}{1+\gamma} = 250\text{K}$$

Теперь найдём значения давления и плотности из уравнения Пуассона:

$$P^{1-\gamma} T^\gamma = const$$
$$P \propto T^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Ответ:

$$P = P_0 \left(\frac{2}{1+\gamma} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 7,22 \cdot 10^5 \text{Па}$$

Плотность входящего воздуха

$$\rho_0 = \frac{P_0}{rT_0}$$

откуда также из уравнения Пуассона

Ответ:

$$\rho = \frac{P_0}{rT_0} \left(\frac{2}{1+\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 5,34 \text{ кг/м}^3$$

Поскольку $M = 1$, с учётом найденной температуры

Ответ:

$$v = \sqrt{\frac{2\gamma rT_0}{\gamma+1}} = 317 \text{ м/с}$$

Найдём ε . Подставим температуру T в выражение для массового расхода

$$\frac{dm}{dt} = I \frac{P_{atm}}{rT_0} = \frac{\gamma P_0 A}{c_0} \left(\frac{2}{1+\gamma} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

где

$$A = \pi D \varepsilon$$

откуда

Ответ:

$$\varepsilon = \frac{I}{c_0 \pi D} \frac{P_{atm}}{P_0} \left(\frac{1+\gamma}{2} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = 0,047 \text{ мм}$$

D1 1.50

Рассчитайте значения M, T, P, v и ρ вытекающего газа при $\varepsilon = 0.5$ мм и $dm/dt = 0.1$ кг/с.

Идея решения данного пункта схожа с пунктом C2, но за тем исключением, что для начала необходимо определить число Маха M .
Получим выражение для массового расхода как функцию M

$$\frac{dm}{dt} = \frac{P_0 A \gamma}{c_0} M \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = \frac{P_0 \pi \varepsilon D \gamma}{c_0} M \left(1 + \frac{(\gamma-1)M^2}{2} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(1-\gamma)}}$$

Решая данное уравнение на калькуляторе, получим

Ответ:

$$M = 0,055$$

Найдя M , по ранее полученным формулам находим

Ответ:

$$T = 297 \text{ K}$$

Ответ:

$$P = 6,98 \cdot 10^5 \text{Па}$$

Ответ:

$$\rho = 8,20 \text{кг/м}^3$$

Ответ:

$$v = 18,8 \text{м/с}$$