

A1^{0.20} Пусть кривая совершает один оборот вокруг цилиндра радиуса $R < \frac{l}{2\pi}$ (т.е $\varphi_B - \varphi_A = 2\pi$)
Найдите угол между касательной к кривой и осью симметрии цилиндра.

Ответ: Угол наклона постоянен, так что "развернув" винтовую линию получим

$$l \sin \theta = 2\pi R$$

откуда

$$\theta = \arcsin \frac{2\pi R}{l}$$

A2^{0.40} Пусть $\varphi_B - \varphi_A = \Delta\varphi$.
Выразите $z_B - z_A$ через l , R и $\Delta\varphi$

Ответ: Длина куска винтовой линии $d\varphi$ равна по теореме Пифагора

$$dl = \sqrt{(R \operatorname{tg} \theta d\varphi)^2 + (R d\varphi)^2} = d\varphi \sqrt{R^2 \operatorname{tg}^2 \theta + R^2}$$

Поэтому полная длина равна $l = R \Delta\varphi \sqrt{\operatorname{tg}^2 \theta + 1}$, откуда получаем $\operatorname{tg} \theta = \sqrt{(\frac{l}{R \Delta\varphi})^2 - 1}$ и

$$\Delta z = z_B - z_A = R \operatorname{tg} \theta \Delta\varphi = \sqrt{l^2 - (R \Delta\varphi)^2}$$

A3^{0.40} Для $\frac{R \Delta\varphi}{l} \ll 1$ покажите, что

$$z_B - z_A = l - \frac{(R \Delta\varphi)^2}{2l}$$

Ответ: Раскладывая предыдущую формулу в ряд Тейлора получим ответ.

B1^{0.10} Измерьте массу гайки m .

Ответ: Взвесим гайку на весах. Разброс масс гаек достаточно большой. Ответ: $m = 10.0 \pm 0.4$ г.

B2^{0.90} Измерьте радиус нити r_1 методом рядов.

Ответ: Измерим радиус, плотно наматывая нить на линейку N раз. Если длина намотанной части равна D , то радиус нити равен $r = \frac{D}{2N}$. Получим $N = 60$, $D = 12 \pm 1$ мм и $r = 0.10 \pm 0.01$ мм.

B3^{3.00} Измерьте момент инерции гайки относительно её главной оси.
Считайте, что $g = 9,8$ м/с².

Ответ: Соберем бифилярный подвес (см. рис.). Нужно следить, чтобы гайка была параллельна полу. Из теории период крутильных колебаний будет равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{IL}{mgaR}}$$

Отсюда находим

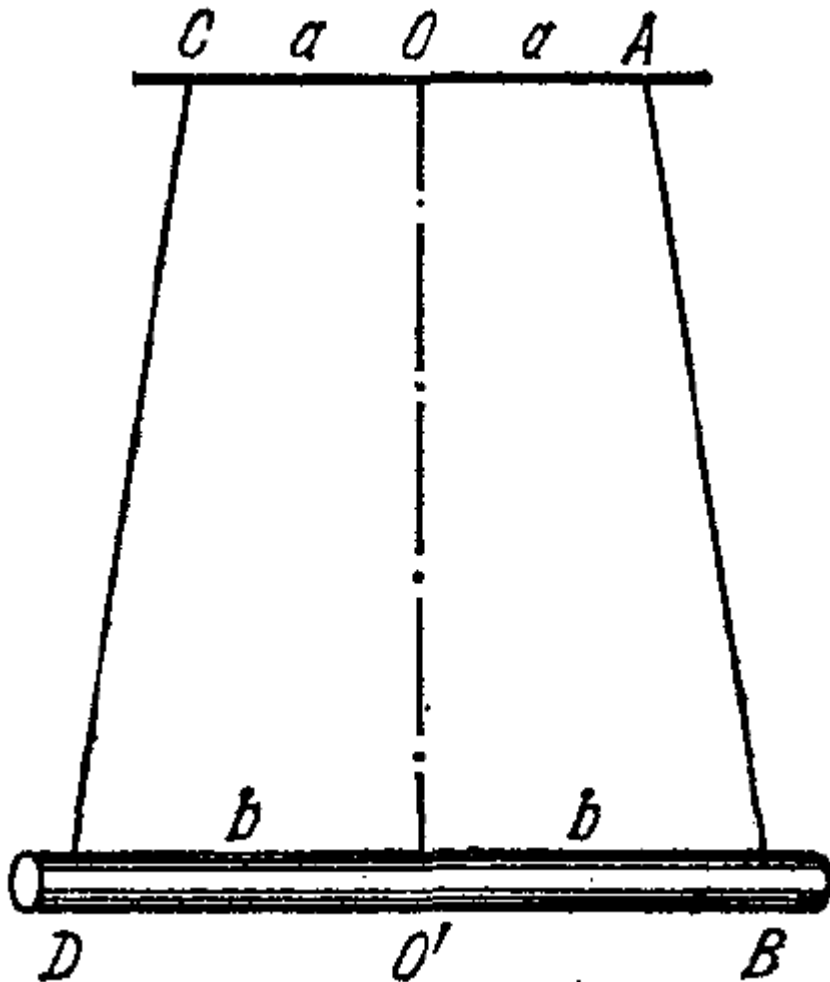
$$I = \frac{mgaRT^2}{4\pi^2L}$$

Численно $I = (5.1 \pm 0.5) \cdot 10^{-7} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

Чтобы увеличить точность измерения a стоит взять его достаточно большим, но так чтобы успевать "ловить" период T .

Чтобы точно измерить R можно прокатить гайку по линейке. При перекате между гранями гайка проскальзывает по линейке. От этого можно избавиться прилепив очень тонкий слой клейкой массы на уголки гайки. Если гайка проехала расстояние l за N перекатов, ее длина радиус равен

$$R = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{l}{N}$$



C1 ??

Запишите расстояние L от точки подвеса до точки скрепления для вашей установки.

C2 1.70

При закручивании нитей на угол φ гайка поднимается на высоту h . Снимите зависимость $h(\varphi)$ в максимально широком диапазоне (до углов порядка 500π), закручивая гайку против часовой стрелки, если смотреть на неё сверху вниз. В дальнейшем будем называть это направление закрутки правым. Следите за тем, чтобы отрезки нитей ниже точки скрепления не перекручивались. На нитях не должны появляться узелки и катышки.

C3 1.10

Снимите аналогичную зависимость для закручивания в другую сторону. Убедитесь в асимметрии установки.

C4 0.30

Выведите теоретическую зависимость $h(\varphi)$. Пользуясь этим, линеаризуйте зависимость, полученную в пункте C2.

Ответ: Систему из двух перекрученных нитей можно рассматривать как две винтовые линии с ненулевой "толщиной" линии. Точки соприкосновения двух нитей лежат на одной прямой, которая является осью винтовой линии. Поэтому и радиус винтовой линии равен радиусу нитей r . Используя результат А3 получим

$$h = \frac{(r\varphi)^2}{2L}$$

C5 1.20

Для правой закрутки нити постройте график зависимости $h(\varphi)$ в координатах, в которых он является линейным. Из углового коэффициента еще раз определите радиус нити r_2 .

Ответ: Как следует из предыдущего пункта зависимость $h(\varphi^2)$ должна быть линейной. Построим график в этих осях. Получается прямая. Ее угловой коэффициент из теории равен

$$k = \frac{r^2}{2L}$$

откуда находим $r_2 = \sqrt{2Lk}$.

С6 0.70 Получите теоретическую зависимость τ от параметров установки, где $\tau(h)$ - время, за которое гайка останавливается, если её отпустить с высоты h .

Ответ: Запишем закон сохранения энергии:

$$E = mgh + \frac{I\omega^2}{2} = mg\frac{(r\varphi)^2}{2L} + \frac{I\dot{\varphi}^2}{2} = \text{const}$$

Дифференцируя это по времени, получим

$$0 = mg\frac{r^2\varphi\dot{\varphi}}{L} + I\dot{\varphi}\ddot{\varphi}$$

откуда

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgr^2}{IL}\varphi = 0.$$

Это уравнение гармонических колебаний с частотой $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgr^2}{IL}}$.

Время до первой остановки равно половине периода, т.е.

$$\tau = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\omega_0} = \pi\sqrt{\frac{IL}{mgr^2}}$$

С7 1.00 Для правой закрутки экспериментально получите зависимость $\tau(h)$.

Ответ: Измерив $\tau(h)$, получим, что это константа с точностью до случайной погрешности $\approx 1\text{с}$, что и соответствует гармоническим колебаниям - период не зависит от амплитуды.

С8 2.50 Снимите зависимость $\tau(L)$. Постройте линеаризованный график.

Ответ: Из пункта С6

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{IL}{mgr^2}}.$$

Построим график в осях $\tau(\sqrt{L})$. Он линейный, что подтверждает теоретическую формулу для τ .

С9 1.20 Модулем кручения f однородного стержня называют коэффициент пропорциональности в формуле $M = f \cdot \varphi$, где M - закручивающий момент сил, приложенных к основанию стержня, φ - угол поворота основания стержня. Определите коэффициент C в зависимости $f = C/L$, где f - собственный модуль кручения одной нити, L - длина нити. Опишите метод. Оцените отношение $\frac{C}{mgr^2}$. Убедитесь, что рассмотренный эффект почти не влияет на полученные результаты.

Ответ: Подвесим гайку на одной нити так, чтобы натянутая нить располагалась на оси вращательной симметрии гайки. Из теории известно, что при этом будут происходить гармонические колебания с периодом

$$T_f = 2\pi\sqrt{\frac{I}{f}}$$

Таким образом:

$$f = 4\pi^2 \frac{I}{T_f^2} = \frac{C}{L} \Leftrightarrow T_f^2 = 4\pi^2 \frac{I}{C} L$$

Проведем измерения $T_f(L)$ и построим график в координатах $T_f^2(L)$. По коэффициенту наклона определим C :

$$C = (1.9 \pm 0.3) \cdot 10^{-9} \text{ Н} \cdot \text{м}$$

C10^{0.30}

Заметьте, что гайка раскручивается до неразличимых глазом угловых скоростей. Оцените по порядку, с какой максимальной угловой скоростью она вращается.

Ответ: Энергия системы равна

$$E = \frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + mgh = \frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{mgr^2}{2L}\varphi^2$$

Приравняем энергию системы в верхней и нижней точке:

$$\frac{I\omega^2}{2} = mgh$$

откуда

$$\omega = \sqrt{\frac{2mgh}{I}}$$

Взяв $h = 30$ мм и подставив числа, получим $\omega_{max} \approx 160$ рад/с.

D1^{1.20}

Считая известным, что при отклонении линейки на угол φ от положения равновесия изменение её высоты представимо в виде

$$h = A\varphi,$$

выразите A через R_0, H_0 и r .

Ответ: При переходе из прямого участка нити в винтовую линию ее угол наклона не меняется. "Развернув" нить и записав теорему Пифагора получим

$$H^2 + (R_0 + r\varphi)^2 = H_0^2 + R_0^2$$

Дифференцируя это по φ получим

$$2H_0 \frac{dH}{d\varphi} + 2R_0 r = 0$$

(здесь мы пренебрегли слагаемым $2r^2\varphi$).

Отсюда

$$H = H_0 - \frac{R_0}{H_0} r \varphi$$

D2^{0.80}

Получите теоретическую зависимость $\tau'(\varphi_0)$, где τ' - время от начала движения линейки до момента ее первой остановки, φ_0 - начальный угол закручивания нитей.

Ответ: Линейку можно считать длинным однородным стержнем, тогда ее момент инерции равен $I = \frac{1}{3}mR_0^2$.

Запишем закон сохранения энергии:

$$E = mgh + \frac{I\dot{\varphi}^2}{2} = mgA\varphi + \frac{I\dot{\varphi}^2}{2} = \text{const}$$

Дифференцируя это по времени:

$$0 = mgA\dot{\varphi} + I\dot{\varphi}\ddot{\varphi}$$

откуда

$$\ddot{\varphi} = -\frac{mgA}{I} = \text{const}$$

Это уравнение равноускоренного движения. Время до остановки равно удвоенному времени прохождения из крайнего положения в положение равновесия:

$$\tau' = 2\sqrt{\frac{2I\varphi_0}{mgA}} = 2\sqrt{\frac{2R_0^2\varphi_0}{3gA}} = 2\sqrt{\frac{2H_0R_0\varphi_0}{3gr}}$$

D3 ^{1.50} Снимите зависимость $\tau'(\varphi_0)$, где τ' - время от начала движения линейки до момента ее первой остановки, φ_0 - начальный угол закручивания нитей. Измерения проводите в диапазоне $\varphi_0 \in [\pi; 10\pi]$.

D4 ^{1.50} Постройте линеаризованный график и в третий раз определите радиус нити r_3 .

Ответ: Учитывая D2 построим график в координатах $\tau'(\sqrt{\varphi_0})$. Он линейный. Из теории, его угловой коэффициент равен $k = 2\sqrt{\frac{2H_0R_0}{3gr}}$. Отсюда найдем $r_3 = \frac{8H_0R_0}{3gk^2}$.