



В этой задаче мы рассмотрим движение частицы в гравитационном поле с учетом релятивистских поправок. В общем случае для описания релятивистских эффектов в гравитации нужно использовать общую теорию относительности (ОТО). Однако если гравитационное поле сферически симметрично, задачу можно решить только с помощью законов сохранения.

Во всех частях задачи мы будем рассматривать движение легкого тела массы m в гравитационном поле намного более массивного тела массы M – звезды, которую считаем неподвижной. Звезда характеризуется гравитационным радиусом $r_g = 2GM/c^2$. На расстояниях $r \gg r_g$ гравитационное поле описывается теорией Ньютона, на меньших расстояниях нужно учитывать релятивистские поправки.

Положение частицы в некоторый момент времени t , задается тремя сферическими координатами r, θ, φ . Не ограничивая общности, будем считать, что движение происходит в экваториальной плоскости $\theta = \pi/2$. Время t измеряется по часам наблюдателя, находящегося на большом расстоянии до звезды.

Из-за эффектов ОТО значения расстояния и времени, измеренные неподвижными наблюдателями рядом со звездой, отличаются от стандартных. Расстояние между двумя близкими точками (с учетом $\theta = \pi/2 = \text{const}$)

$$dl^2 = \frac{1}{1 - r_g/r} dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$

Промежуток времени, измеренный по часам наблюдателя в точке с координатой r

$$dT^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2.$$

Собственное время для частицы определяется стандартным выражением $d\tau^2 = dT^2 - dl^2/c^2$. Оно равно показаниям часов частицы, которая движется в гравитационном поле.

Законы сохранения энергии и момента импульса имеют вид

$$E = mc^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} = \text{const};$$

$$L = mr^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = \text{const}.$$

Здесь производные вычисляются по собственному времени частицы.

Все выражения здесь применимы только при $r > r_g$. Радиус нормальных звезд больше r_g . Если же вещество сжимается до размера меньше гравитационного радиуса, соответствующего его массе, образуется черная дыра. Любое тело, достигшее $r = r_g$, неизбежно падает внутрь черной дыры.

Часть А. Разминка

Рассмотрим нерелятивистское движение тела массы m в гравитационном поле звезды массы $M \gg m$. Движение происходит в плоскости, положение тела задается полярными координатами r, φ , звезда расположена в начале координат. В этой части не нужно учитывать релятивистские эффекты!

A1 ^{0.50} Выразите энергию тела E через r , радиальную скорость $v_r = dr/dt$, момент импульса L и параметры системы (G, M, m) .

A2 ^{0.50} Введем переменную $w = 1/r$. Выразите радиальную скорость v_r через производную этой переменной по углу $dw/d\varphi$, а также L, m, w и подставьте это выражение в закон сохранения энергии.

A3 ^{0.50} Продифференцировав закон сохранения энергии по φ , получите уравнение второго порядка на $w(\varphi)$. Получите отсюда, что

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 - e \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

при некоторых постоянных p, e, φ_0 .

Часть В. Вывод уравнений движения

Начиная с этой части мы занимаемся релятивистской задачей. Нужно использовать формулы для энергии и момента импульса из введения.

B1 ^{0.50} Используя соотношение между собственным временем частицы $d\tau$ и изменением ее координат, получите уравнение, связывающее квадраты производных $dr/d\tau, dt/d\tau, d\varphi/d\tau$.

B2 ^{0.50} Используя законы сохранения энергии и момента импульса, а также соотношение, найденное в предыдущем пункте, получите выражение вида

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{E^2}{m^2 c^2} - c^2 V(r).$$

Здесь $V(r)$ – некоторый эффективный потенциал, который может содержать L, r_g и фундаментальные постоянные.

B3 ^{1.00} Покажите, что в нерелятивистском случае, то есть при $r \gg r_g$ и $v \ll c$, соотношение из предыдущего пункта переходит в стандартный закон сохранения энергии для движения в центральном потенциале.

B4 ^{0.50} Введем безразмерную переменную $u = r_g/r$, а также безразмерный момент импульса $l = L/mcr_g$. Используя определение момента импульса, выразите $dr/d\tau$ через $du/d\varphi$, а также l, m, r, r_g . Подставьте полученное выражение в результат B2. В результате у вас должно получиться уравнение, содержащее u'^2, u и интегралы движения (l, E) .

- B5^{0.50}

Продифференцировав результат B4 по φ , получите уравнение второго порядка на $u(\varphi)$. Оно аналогично уравнению из A3 и содержит релятивистские поправки к форме орбиты.
- Часть C. Прецессия орбиты

C1^{0.80}

Пусть тело движется с моментом импульса l по круговой орбите. Найдите возможные значения радиуса орбиты a . Выразите ответ через r_g и l .

Предположим, что движение частицы нерелятивистское, то есть она находится на расстоянии $r \gg r_g$ от звезды. Форма орбиты близка к круговой. Эффекты ОТО приведут к тому, что положение перигелия (ближайшей к звезде точки) орбиты будет медленно меняться с течением времени. Пусть $u = u_0 + \delta u$, где $u_0 = r_g/a \ll 1$ (a – радиус круговой орбиты), а $\delta u(\varphi) \ll u_0$ представляет собой малое отклонение от круговой орбиты.

C2^{1.00}

Используя уравнение из B5, получите линейное уравнение на отклонение орбиты от круговой и найдите угловое расстояние $\Delta\varphi$ между двумя соседними максимумами $u(\varphi)$. На какой угол $\delta\varphi$ смещается положение перигелия за один период? Выразите ответ через G , M , c , a .

C3^{0.50}

На какой угол перигелий Меркурия смещается за одно столетие? Орбиту Меркурия можно считать круговой, ее радиус $a = 57.9 \cdot 10^9$ м, период обращения Меркурия вокруг Солнца $T = 88$ дней, масса Солнца $M = 1.99 \cdot 10^{30}$ кг, гравитационная постоянная $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ м³/(кг · с²), скорость света $c = 2.998 \cdot 10^8$ м/с.

C4^{1.00}

Найдите минимальный радиус устойчивой круговой орбиты для частицы, движущейся в поле черной дыры. Выразите ответ через r_g .
- Часть D. Отклонение света
- Пусть теперь мимо звезды пролетает ультрарелятивистская частица, энергия которой много больше энергии покоя $E \gg mc^2$. Если не учитывать гравитационное поле, частица бы двигалась по прямой и пролетела бы на минимальном расстоянии $b \gg r_g$ до звезды. Тогда ее момент импульса $L = pb \approx Eb/c$, а значит $l \approx Eb/mc^2 r_g \gg 1$.

D1^{0.20}

Запишите уравнение, описывающее вид траектории $u(\varphi)$ ультрарелятивистской частицы, с учетом условия $l \gg 1$. Используйте результат B5.

Если частица пролетает достаточно далеко от звезды, величина $u(\varphi)$ все время мала. Поэтому нелинейные члены в полученном уравнении можно рассматривать как малую поправку. Поэтому сначала решим линейное уравнение, а затем изучим отклонение, вызванное нелинейностью.

D2^{0.40}

Пренебрежем в уравнении из D1 нелинейными по $u(\varphi)$ членами. Найдите решение $u = u_0(\varphi)$, которое описывает частицу, пролетающую на минимальном расстоянии b от звезды, причем минимуму отвечает угол $\varphi = 0$.

D3^{0.60}

Рассматривая нелинейный член в D1 как малую поправку, заменим в нем $u(\varphi)$ на $u_0(\varphi)$. Получите таким образом поправку $u_1(\varphi)$ к решению из D1. Таким образом, приближенное решение нелинейного уравнения будет иметь вид $u(\varphi) = u_0(\varphi) + u_1(\varphi)$.

D4^{1.00}

Частица удаляется на бесконечность, когда $u(\varphi) = 0$. Используя приближенное решение из предыдущего пункта, найдите угол отклонения частицы от прямолинейного распространения. Выразите ответ через G , M , c , b .
- Т

Механика

Гравитация

2021

Сборы XY

Y

ОТО
-  Website in English
- 2020 — Мы те, кого должны превзойти.