



Рассмотрим классическую механическую систему с некоторым параметром λ , который может медленно меняться с течением времени. Если движение системы периодическое с периодом T , изменение параметра можно считать медленным при условии

$$T \frac{d\lambda}{dt} \ll \lambda.$$

В общем случае по времени T можно понимать характерное время процессов, протекающих в системе.

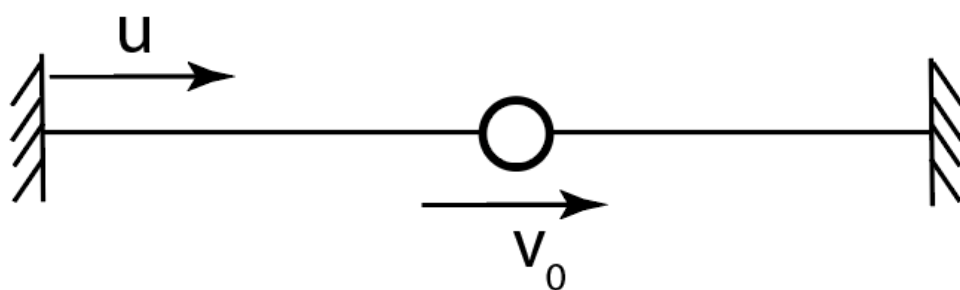
Адиабатический инвариант – физическая величина, которая не меняется при плавном изменении параметров системы. Можно доказать, что адиабатическим инвариантом является величина

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p dq.$$

Здесь p – одна из проекций импульса системы, q – соответствующая координата.

Если изобразить периодическое движение частицы в координатах p, q , при периодическом движении получим замкнутую кривую. Тогда интеграл в определении I равен площади, ограниченной этой кривой.

Часть А. Движение между двумя стенками (0.8 балла)



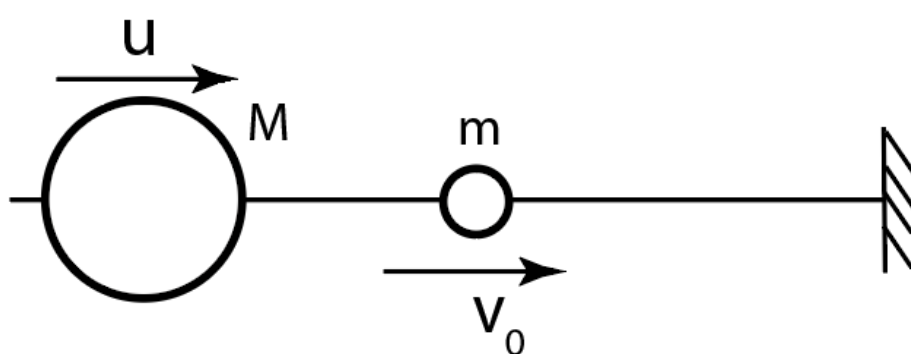
По гладкой горизонтальной спице между двумя вертикальными стенками может скользить бусинка массы m . Все удары бусинки со стенками абсолютно упругие. Одна стенка неподвижна, а вторая стенка движется по направлению к первой со скоростью u , удовлетворяющей соотношению $u \ll v$, где v – скорость бусинки. Начальное расстояние между стенками равняется L_0 , начальная скорость бусинки v_0 .

A1 ^{0.20} Найдите скорость бусинки сразу после соударения с подвижной стенкой.

A2 ^{0.20} Найдите изменение расстояния между стенками за время между двумя последовательными соударениями бусинки с подвижной стенкой. Необходимо получить точную формулу.

A3 ^{0.40} Найдите выражение для адиабатического инварианта I для рассмотренной системы и определите скорость бусинки в момент, когда расстояние между стенками уменьшилось до значения L .

Часть В. Движение между стенкой и тяжёлой частицей (1.2 балла)

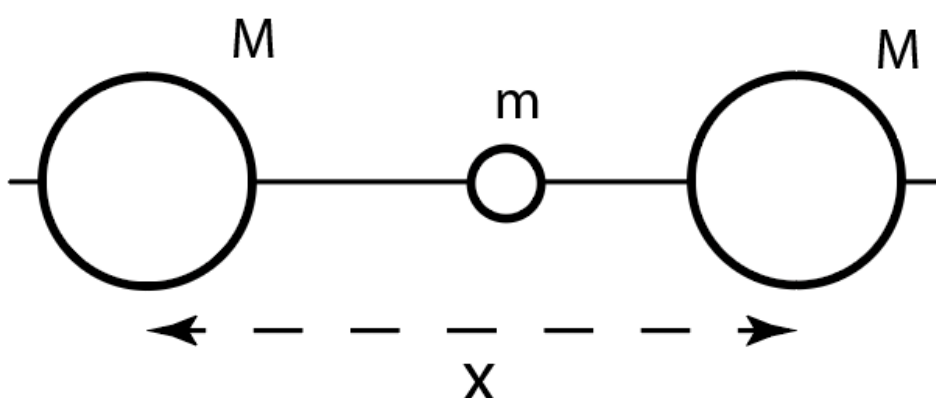


Данная часть задачи является фактическим продолжением предыдущей. Отличие состоит в том, что теперь на лёгкую частицу массы m , движущуюся со скоростью v_0 налетает со скоростью $u \ll v_0$ частица массы $M \gg m$. С другой стороны по-прежнему неподвижная стенка. Начальное расстояние между частицами равнялось L_0 . Известно, что в процессе движения максимальная скорость легкой частицы равнялась kv_0 . Массы частиц не даны!

B1 ^{0.40} Выразите отношение масс M/m через u, v_0 и k .

B2 ^{0.80} Через какое время тяжёлая частица остановится? Ответ выразите через L_0, v_0, u и k .

Часть С. Модель иона (1.5 балла)



В данной части рассматривается упрощённая модель иона H_2^+ . Две частицы массы M и находящаяся между ними частица массы $m \ll M$ могут двигаться по гладкой горизонтальной спице. Лёгкая частица притягивается к тяжёлым с постоянными силами F . В момент, когда расстояние между тяжёлыми частицами равнялось L_0 , скорость лёгкой частицы в системе отсчета центра масс двух тяжелых частиц равняется v_0 . Вам предлагается исследовать положение равновесия данной системы, а также найти частоту её малых колебаний вблизи него. Обозначим расстояние между тяжёлыми частицами за x .

- C1

0.40

Получите выражение для кинетической энергии системы. Ответ выразите через $M, m, x, \dot{x}, v_0$ и L_0 .
- C2

0.20

Получите выражение для потенциальной энергии системы. Ответ выразите через F и x .
- C3

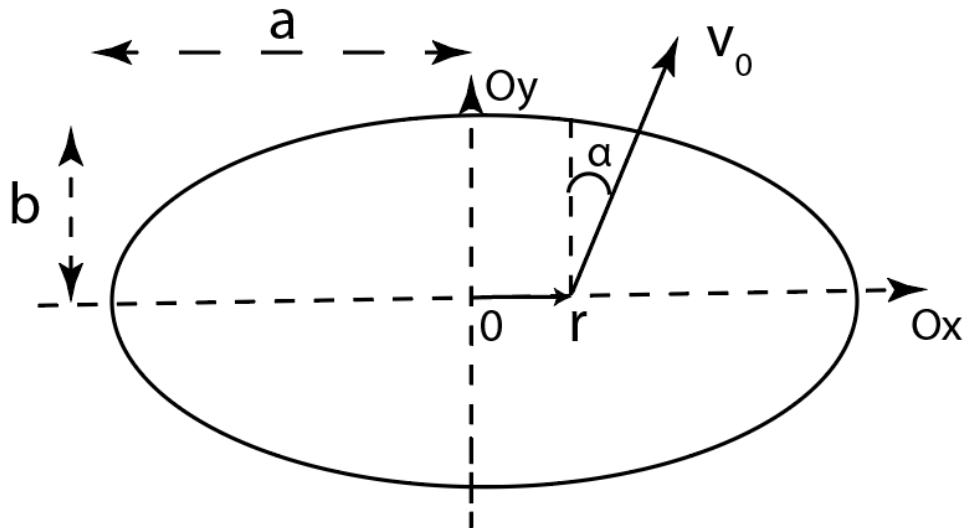
0.50

При каком значении x система находится в положении равновесия? Ответ выразите через M, m, v_0, L_0 и F .
- C4

0.40

Найдите циклическую частоту малых колебаний системы вблизи положения равновесия. Ответ выразите через M, m, v_0, L_0 и F .

Часть D. Движение внутри эллипса (2.2 балла)



По гладкой горизонтальной поверхности ограниченной вертикальными стенками может свободно двигаться маленькая шайба. Стенки ограничивают часть поверхности в форме эллипса с большой и малой полуосями a и b соответственно. В положении с координатами $(r; 0)$ шайбе сообщили скорость, проекции которой равны $v_x = v_0 \sin \alpha; v_y = v_0 \cos \alpha$, причём $r \ll a, b, \alpha \ll 1$. От вас потребуется в первом приближении по этим малым параметрам описать движение шайбы.

- D1

1.00

Можно показать, что в рассматриваемом приближении квадрат компоненты v_x скорости шайбы зависит от координаты x как $v_x^2 = A + Bx + Cx^2$. Выразите A, B и C через v_0, α, a, b и r .
- D2

0.60

Найдите максимальное значение координаты x шайбы в процессе движения. Ответ выразите через v_0, α, a, b и r .
- D3

0.60

Через какое время после запуска шайба впервые окажется в точке с координатой $x = 0$? Какое условие на соотношение a/b должно выполняться для применимости полученного результата?

Часть E. Математический маятник на наклонной плоскости (1.3 балла)

К гладкой наклонной плоскости привязан математический маятник, совершающий малые колебания вблизи положения устойчивого равновесия. В этой части задачи вам предлагается исследовать, как изменяется амплитуда колебаний маятника с изменением угла наклона плоскости, а также длины маятника. В начальный момент амплитуда колебаний (измеряется угол отклонения маятника от положения равновесия) равна $\varphi_0 \ll 1$, длина маятника равна L_0 , а угол наклона плоскости равен α_0 .

- E1

0.50

Найдите адиабатический инвариант I для гармонического осциллятора с массой m , колеблющегося с циклической частотой ω_0 и амплитудой A .
- E2

0.40

Пусть при неизменном угле наклона длину маятника адиабатически медленно увеличили до L . Найдите новую амплитуду колебаний маятника φ . Ответ выразите через φ_0, α_0, L_0 и L .
- E3

0.40

Пусть при неизменной длине маятника угол наклона адиабатически медленно увеличили до значения α . Найдите новую амплитуду колебаний φ . Ответ выразите через $\varphi_0, \alpha_0, \alpha$ и L_0 .

Часть F. Ларморовская прецессия в медленно изменяющемся магнитном поле (2.5 балла)

Рассмотрим кольцо массы M , равномерно заряженное по периметру зарядом q , помещённое в однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}_0$. Кольцо раскрутили вокруг его оси до угловой скорости $\vec{\omega}$ и отпустили. Угол между векторами магнитной индукции и угловой скорости вращения кольца в начальный момент равен α_0 .

Примечание: Магнитный момент системы зарядов можно вычислить по формуле

$$\vec{m} = \int \frac{[\vec{r} \times \vec{v}]}{2} dq$$

- F1

0.20

Выразите вектор магнитного момента кольца $\vec{m}$ через q, M и вектор его момента импульса относительно центра $\vec{L}$.
- F2

0.20

Покажите, что модуль момента импульса L остаётся постоянным.
- F3

0.70

Покажите, что ось кольца испытывает прецессию и найдите вектор угловой скорости $\vec{\Omega}$ этой прецессии. Ответ выразите через q, M и $\vec{B}_0$. Считайте, что $\Omega \ll \omega$.
- F4

0.70

Магнитное поле адиабатически медленно начинают уменьшать со скоростью $\dot{B}$. Найдите момент сил (модуль и направление), действующих на кольцо со стороны вихревого электрического поля. В этом и следующем пункте считайте, что $\alpha_0 = \pi/2$.
- F5

0.70

Значение магнитного поля уменьшилось до $\vec{B}_1$. Найдите угол между осью вращения и направлением магнитного поля. Изменение угла можно считать малым.

Часть G. Движение в неоднородном магнитном поле (3.0 балла)

Одним из методов удержания частиц в магнитной ловушке в продольном (по полю) направлении состоит в использовании магнитных пробок, или магнитных зеркал, — областей, в которых напряжённость магнитного поля сильно (но плавно) возрастает. Такие области могут отражать налетающие на них вдоль силовых линий заряженные частицы. При движении заряженной частицы в "зеркальной" магнитной ловушке радиус траектории частицы уменьшается при продвижении в область сильного поля. В рамках двух последних частей мы изучим движение в таких полях. Для магнитных зеркал определим коэффициент зеркальности r_m

$$r_m = \frac{B_{max}}{B_{min}}$$

Во всех пунктах считайте, что траектории частиц представляют собой медленно изменяющиеся спирали с малым углом наклона, ведущие центры которых совпадают с силовыми линиями магнитного поля. Введём также компоненты скорости $v_{||}$ и $v_{\perp}$ ($v_{||} \ll v_{\perp}$), обозначающие компоненты скорости частицы, направленные вдоль и перпендикулярно направлению магнитного поля соответственно.

G1 0.20 Рассмотрим для начала плоское движение в однородном магнитном поле с индукцией B_0 . Пусть его производная по времени равна $\dot{B}$ и изменение происходит адиабатически медленно. Начальная скорость частицы равна v_0 , её масса M , а заряд q . Выразите тангенциальное ускорение частицы $\dot{v}_{\perp}$ через M, q, v_0, B_0 и $\dot{B}$.

G2 0.50 Пусть магнитное поле медленно изменило величину до значения B . Выразите скорость частицы $v_{\perp}$ через v_0, B_0 и B .

Перейдём к неоднородному магнитному полю. Поскольку ведущий центр траектории электрона перемещается вдоль силовой линии. Будем считать, что магнитное поле изменяется только в данном направлении.

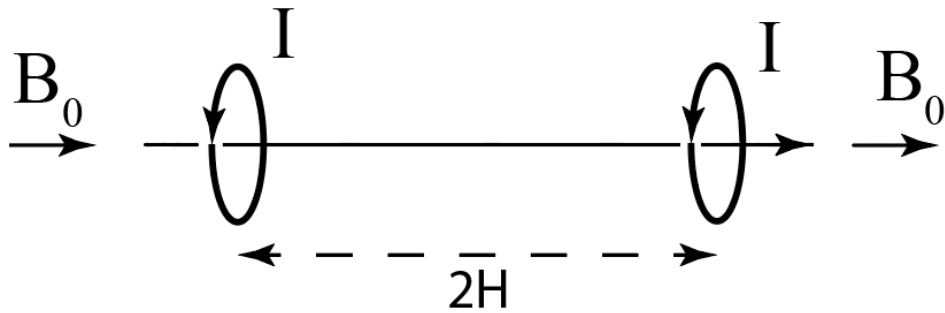
G3 1.00 Пусть угол наклона винтовой линии равен α и мал. Покажите, что усреднённая по времени сила, действующая в направлении магнитного поля на заряд эквивалентна взаимодействию магнитного диполя с неоднородным полем. Найдите величину силы $F_{||}$. Ответ выразите через m, v, q, B_z и $\frac{dB_z}{dz}$, где ось z сонаправлена с магнитным полем.

Указание: Мы уже упоминали, что любые заряженные частицы обладают магнитным моментом. Поэтому вам достаточно рассмотреть контур с постоянным током, движущийся в неоднородном магнитном поле.

G4 0.70 Используя результаты предыдущих пунктов, определите зависимость угла α от величины магнитного поля B . Ответ выразите через α_0, B_0 и B .

G5 0.60 Выразите максимально возможное значение угла α через r_m .

Часть Н. Установка для реализации магнитного зеркала (2.5 балла)



Мы изучили движение в неоднородных магнитных полях и готовы перейти к исследованию задачи о магнитных зеркалах. Схема, используемая для их реализации, представлена на рисунке. Она представляет собой два соосных витка одинакового радиуса R , центры которых находятся на расстоянии $2H \gg R$ друг от друга. По виткам протекают токи одинаковой силы I в одном направлении. витки помещены в область большого однородного магнитного поля с индукцией B_0 , направленного вдоль их осей. Целью данной задачи является исследование силовых линий такой системы и, как следствие, описание траектории ведущего центра орбиты электронов.

H1 0.40 Получите точную формулу зависимости индукции магнитного поля от координаты x . Начало координат находится по центру между витками, ось x направлена вдоль магнитного поля. Найдите, учитывая малость некоторых параметров, также максимальное и минимальное значение суммарной индукции магнитного поля на оси витков.

H2 0.60 Найдите коэффициент зеркальности r_m для данной системы. Учтите здесь и в дальнейшем, что $H \gg R$.

H3 1.00 Качественно нарисуйте силовую линию, проходящую через плоскость кольца на малом расстоянии $R_0 \ll R$ от его оси в координатах $r'(x)$, где r' – расстояние до оси симметрии системы. Найдите максимальное значение r' и выразите ответ в виде: $r' \approx A + B(r - 1)$.

H4 0.50 Найдите максимальное значение угла α в процессе движения, если отражения от магнитных зеркал происходит в плоскости колец. Считайте, что точки разворота частицы находятся достаточно близко к центрам колец. Учтите малость r_m .