



Тонкое кольцо массой m и радиусом r находится на столе с коэффициентом трения μ и гравитационным ускорением g . Кольцу сообщили линейную скорость v (в направлении x) и угловую скорость ω (против часовой стрелки). Кольцо движется по прямой, вращаясь вокруг собственной оси, и, в конце концов, останавливается. В дальнейшем мы попытаемся найти величины $v(t)$, $\omega(t)$ и некоторую симметрию между ними. Во всех последующих пунктах предполагается, что действие реакции опоры на кольцо распределено равномерно.

Вам может понадобиться следующая формула:

$$\sqrt{\frac{1 - \sin \theta}{2}} = \left| \sin \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right|$$

Уравнения движения

A1^{0.50} Покажите, что суммарная сила, действующая на кольцо, определяется выражением:

$$\vec{F}_{tot} = -\mu mg \cdot f \left(\frac{v(t)}{\omega(t) r} \right) \hat{x},$$

где

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a - \sin \theta}{\sqrt{1 + a^2 - 2a \sin \theta}} d\theta$$

A2^{0.50} Покажите, что суммарный момент, действующий на кольцо, равен:

$$\tau_{tot} = -\mu mgr f \left(\frac{\omega(t)r}{v(t)} \right)$$

A3^{0.10} Докажите, что уравнения движения имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -\mu g \cdot f \left(\frac{v}{\omega r} \right) \\ \dot{\omega} r &= -\mu g \cdot f \left(\frac{\omega r}{v} \right) \end{aligned}$$

Первичное исследование

Мы получили систему дифференциальных уравнений, связывающие $v(t)$ и $\omega(t)$. В этой части хотим найти интересные физические аспекты этой ситуации, для чего надо произвести нестандартные математические вычисления. Начнём с рассмотрения свойств функции $f(a)$:

B1^{0.50} Докажите:

- a) $f(0) = 0$, $f(1) = \frac{2}{\pi}$, $f(\infty) = 1$
b) $f(a)$ строго возрастает при $a \geq 0$

B2^{0.30} Рассмотрим поведение параметра $a(t) = \frac{v(t)}{\omega(t)r}$. Покажите, что происходит с $a(t)$ (растёт/уменьшается/остаётся неизменным) в каждом из следующих случаев:

- a) в некоторый момент $a(t) = 1$
b) в некоторый момент $a(t) < 1$
c) в некоторый момент $a(t) > 1$

B3^{0.60} Нарисуйте качественно на графике, осями которого являются v и ωr , траектории, отображающие разное движение кольца, то есть при заданных v_0 и $\omega_0 r$ нарисуйте, как они будут изменяться с течением времени.

Необходимо нарисовать хотя бы одну траекторию на каждый пункт предыдущего задания. Кроме того, нарисуйте траекторию, проходящую через точку $(v_0, 0)$ и еще одну, начинающуюся в точке $(0, \omega_0 r)$

Подпишите оси графика и укажите направления движения системы для каждой нарисованной траектории

Рассмотрим мощность, которая расходуется во время движения кольца.

B4^{0.10} Вычислите мгновенную мощность, которая расходуется, когда есть только угловая скорость ω ($v = 0$), и отдельно, когда присутствует только линейная v ($\omega = 0$).

B5^{0.60} Для заданных v и ω вычислите мгновенную мощность P , которая расходуется на трение в данный момент времени. Дайте ответ в виде интеграла с безразмерной переменной.

B6^{1.20} Предположим, что кольцу придали определённую начальную кинетическую энергию E_0 . Каково должно быть соотношение $a_0 = \frac{v_0}{\omega_0 r}$, при котором кольцо будет двигаться максимальное время?

Подсказка: Постарайтесь дать ответ на предыдущий пункт при помощи только E_0 и a_0 (и других данных из этого пункта), исключив из уравнения v и ω

B7^{0.50} Каково максимальное время движения при начальной энергии E_0 ?

Неоднородная система

Система уравнений, которую мы получили в начале задачи называется однородной потому, что система, начинающая движение из точки $(0, 0)$ останется в состоянии покоя, то есть в уравнениях нет члена "тока", создающего движение. Введем такой член в одно из уравнений рассмотрим похожую физическую задачу:

То же самое кольцо положим теперь на наклонную плоскость с углом α с тем же коэффициентом трения μ .

C1^{0.60} Напишите заново уравнения движения из пункта A3 таким образом, чтобы они подходили под новое условие.

C2^{2.00} При заданных начальных ω_0 и $v_0 = 0$ нарисуйте все возможные семейства траекторий движения кольца в координатах $(v, \omega r)$ (для каждого типа кривых нарисуйте свой график). Укажите следующие составляющие:

а) соответствующие значения параметров;

б) конечные точки (в которые траектории приходят за конечное или бесконечное время) в плоскости $(v, \omega r)$. Здесь достаточно написать для каждой составляющей, что она стремится к нулю/ стремится к бесконечности/ равна или стремится к какой-то положительной величине.

Подпишите оси графика и укажите направления движения системы для каждой нарисованной траектории