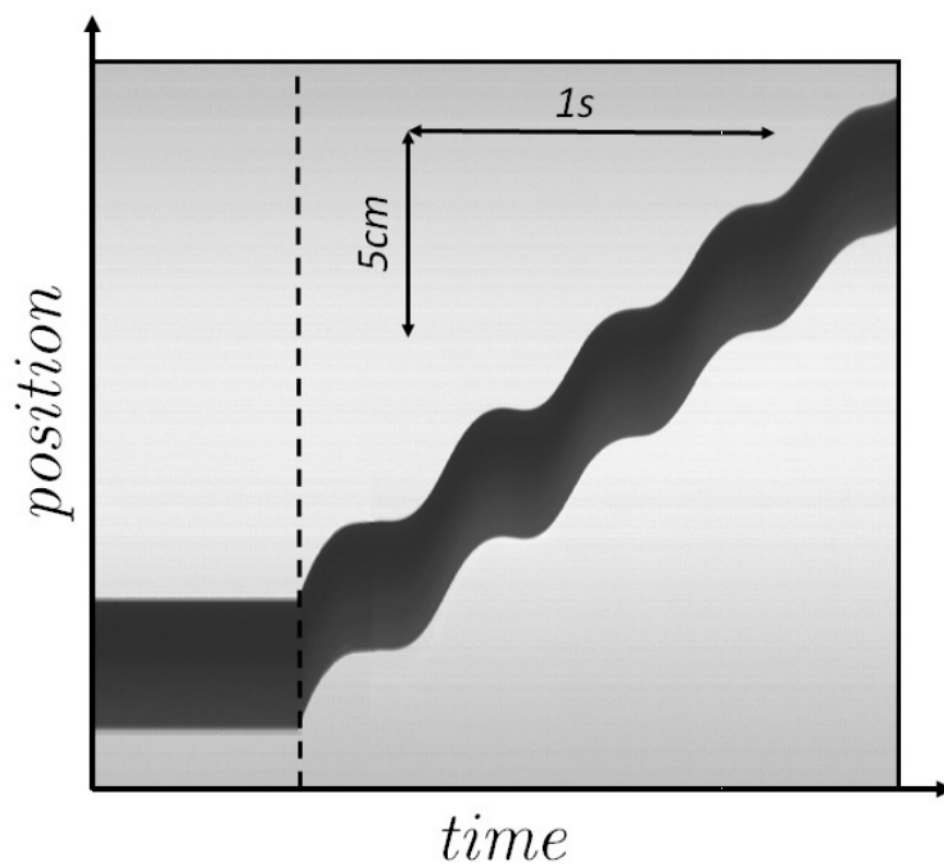




Когда мы толкаем наполовину пустую бутылку с водой по плоскости, колебания жидкости внутри нее вызывают резкое дерганное движение системы. В данной задаче мы изучим данный процесс и построим теорию, объясняющую данное явление. Для первичного ознакомления приведем результаты эксперимента, в котором мы толкнем бутылку с водой, и посмотрим, как зависит ее положение от времени. Во всех экспериментах в течение задачи будет использоваться одна и та же бутылка, поэтому ее параметры данные в одной части можно использовать в другой.



Часть А. Кинематика воды в бутылке

В первую очередь рассмотрим, как вода бултыхается внутри цилиндрического сосуда. Для экспериментального изучения закрепим бутылку радиуса $R = 5.0$ см на горизонтальной оси и путем небольших поступательных колебаний оси создадим колебания уровня воды, а затем подождем, пока система не перейдет в некоторое достаточно устойчивое стационарное состояние колебаний жидкости внутри сосуда.

Чтобы измерить скорость потока жидкости, напомним ее полистироловыми шариками (плотность 1.06 г/см^3 , диаметр 0.7 мм) и сфотографируем стационарное состояние системы камерой с выдержкой (выдержка – интервал времени, в течение которого свет попадает на участок светочувствительного материала или светочувствительной матрицы) $T_e = 1/10 \text{ с}$, это время меньше полупериода колебаний воды в сосуде.



Момент импульса воды относительно оси бутылки связан с угловой скоростью поворота плоскости воды $\dot{\theta}$ и характеристиками системы через некоторый безразмерный коэффициент α :

$$L_w = \alpha \cdot \pi \rho R^4 L \dot{\theta},$$

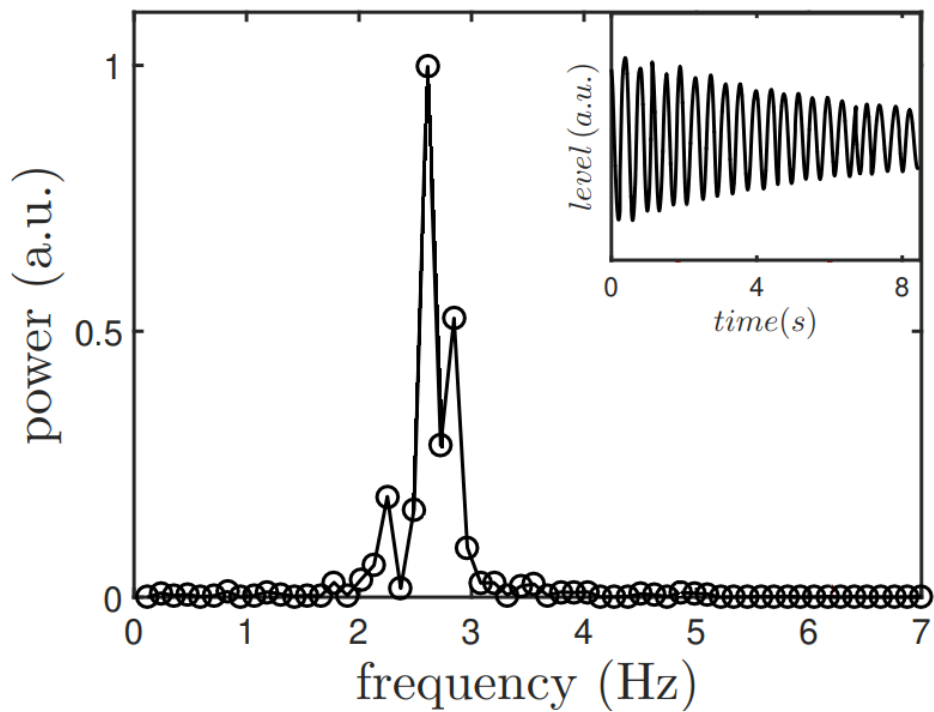
где ρ – плотность воды, R – радиус бутылки, L – ее длина.

- A1^{0.20} Чему равно теоретическое значение α_{solid} , если заменить воду на твердое тело постоянной плотности совпадающей с плотностью воды?
- A2^{4.50} Определите коэффициент α в проведенном эксперименте. Точки, в которой Вы измеряете скорость задавайте парой чисел в полярных координат с центром в оси бутылки r, φ .
- A3^{0.50} Постройте график характеризующий Ваши измерения в координатах r/R vs φ/π .
- A4^{0.20} Сравните полученный α с теоретической оценкой:

$$\alpha_{\text{theory}} = \frac{4}{\pi^2} - \frac{1}{4},$$

полученной в XIX веке лордом Рэлеем.

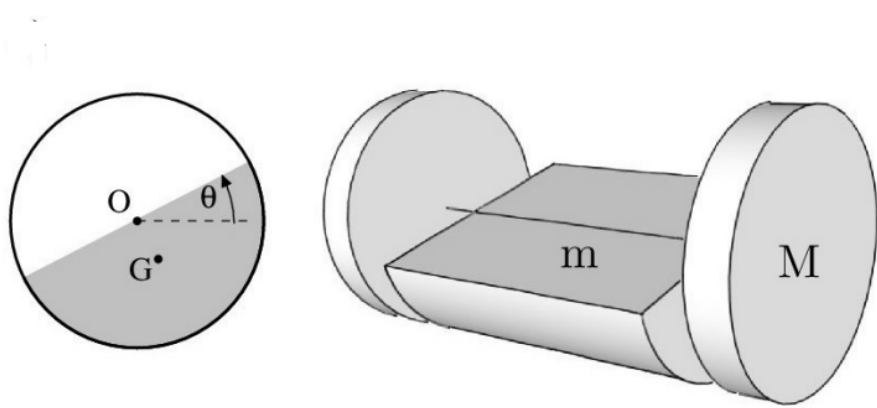
Теперь будем измерять, как угол θ зависит от времени при стационарных колебаниях. Далее применим преобразование Фурье к полученной зависимости $\theta(t)$, т.е. получим спектральную характеристику свободных колебаний жидкости внутри бутылки. Расстояние от центра масс полуцилиндра до его оси обозначьте за a .



- A5^{0.30} По данным представленным на рисунке оцените собственную частоту колебаний системы ω_0 и ее добротность $1/\zeta$.
- A6^{0.70} Оцените α из спектральной характеристики колебаний.

Часть В. Динамика системы

В прошлой части мы пришли к тому, что колебания воды в бутылки с допустимой точностью можно аппроксимировать колебаниями твердого тела полуцилиндрической формы с моментом инерции $I_0 = \alpha \cdot \pi \rho R^4 L$ и массой $m = \frac{\pi}{2} \rho R^2 L$ вокруг его оси. Таким образом бутылку с водой можно представить, как систему из колец суммарной массы M и соосного им полуцилиндра. Причем кольца массы M катятся без проскальзывания по плоскости, а полуцилиндр подвешен за ось колец и не взаимодействует с плоскостью.



Вся система может двигаться вдоль горизонтальной оси x перпендикулярной оси вращения системы. Параметрами нашей системы будет пара переменных x и θ , поэтому все уравнения в ответах пишите в терминах этих переменных и их производных по времени, например $\ddot{x}$.

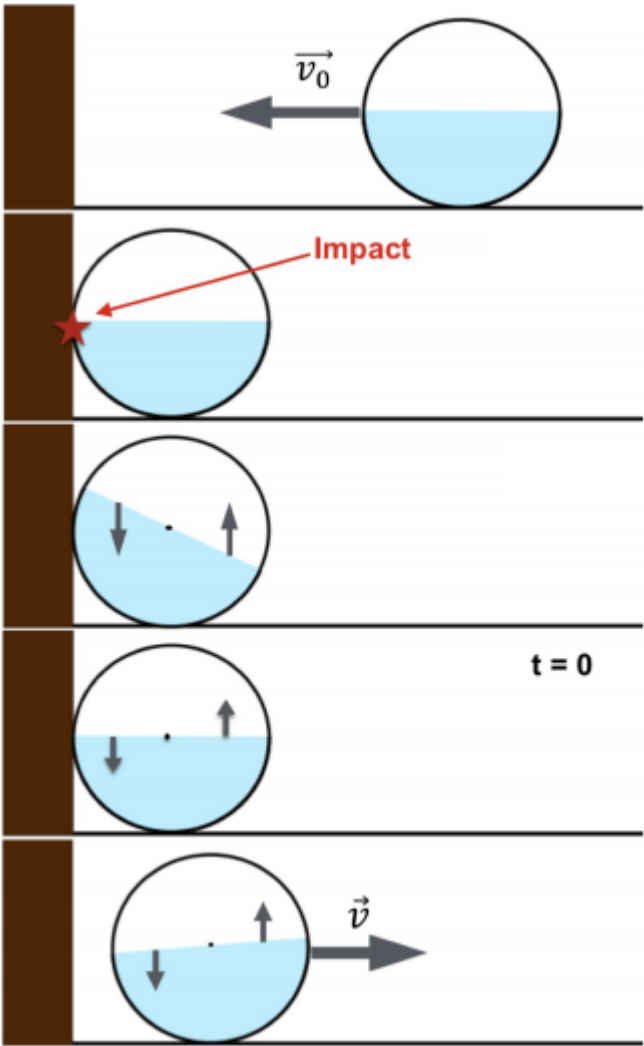
- B1^{0.30} Запишите II закон Ньютона для всей системы системы и уравнение вращательного движения для колец.
- B2^{0.20} Получите из уравнений предыдущего пункта уравнение, в котором есть только константы, параметры нашей системы и их производные.
- B3^{0.30} Запишите уравнение динамики вращательного движения для полуцилиндра, как дифференциальное уравнение второго порядка.
- B4^{0.50} Найдите угловую частоту колебаний системы Ω . Запишите решений полученной системы из двух уравнений, которое описывает то, как бутылка катиться рывками по плоскости.

Для подтверждения данной теории проведем следующий эксперимент. Разгоним поступательно систему до скорости v_0 и столкнем ее со стенкой. В нашем случае масса воды $m = 2.780$ кг, $M = 0.910$ кг, $L = 70$ см.

Так как масса воды в несколько раз больше массы бутылки, будем считать, что η кинетической энергии перед ударом переходит в энергию колебаний, а остальная рассеивается. Ниже представлена схема, как это происходит.

- B5^{0.30} Пусть амплитуда колебаний скорости бутылки γv_0 после отскока от стенки. Выразите γ через известные величины и η .

Далее приведены результаты измерения $\dot{x}/v_0$ vs t .



$t, \text{ c}$	$\dot{x}/v_0$	$t, \text{ c}$	$\dot{x}/v_0$	$t, \text{ c}$	$\dot{x}/v_0$
-0.75	-0.96	0.55	0.42	1.42	0.41
-0.66	-0.98	0.58	0.26	1.47	0.23
-0.53	-0.96	0.61	0.10	1.51	0.08
-0.41	-0.96	0.63	0.03	1.55	-0.09
-0.31	-0.96	0.64	0.04	1.60	0.00
-0.19	-0.97	0.70	0.20	1.65	0.29
-0.18	-0.51	0.73	0.34	1.67	0.42
-0.14	0.00	0.76	0.47	1.71	0.45
-0.08	0.01	0.78	0.52	1.74	0.38
-0.02	0.01	0.83	0.50	1.79	0.14
0.04	0.07	0.90	0.25	1.84	0.00
0.07	0.19	0.92	0.04	1.86	-0.03
0.08	0.31	0.95	-0.07	1.92	0.07
0.13	0.44	0.96	-0.05	1.93	0.22
0.17	0.57	1.02	0.13	1.96	0.37
0.23	0.47	1.05	0.26	2.03	0.52
0.26	0.34	1.07	0.41	2.06	0.43
0.28	0.18	1.10	0.41	2.08	0.30
0.31	0.08	1.16	0.22	2.15	0.06
0.33	0.05	1.21	-0.04	2.18	0.02
0.36	0.13	1.24	-0.12	2.18	0.21
0.39	0.33	1.31	0.09	2.18	0.03

0.43	0.50	1.34	0.26	2.27	0.36
0.49	0.59	1.37	0.37	2.31	0.51
0.50	0.57	1.40	0.41	—	—

- В6^{1.50}

Постройте график $\dot{x}/v_0$ vs t .
- В7^{0.20}

Найдите экспериментальное значение Ω , сравните его с теоретически.
- В8^{0.30}

Найдите значение η .

РЕ

Механика

Колебания

2021

Сборы ХУ

У

Физический маятник

 Website in English