

A1 0.50 Выразите энергию тела E через r , радиальную скорость $v_r = dr/dt$, момент импульса L и параметры системы (G, M, m) .

Момент импульса частицы

$$L = mr^2 \frac{d\varphi}{dt}$$

Для вычисления кинетической энергии разобьем скорость на радиальную (v_r) и угловую (v_θ) компоненты:

$$T = \frac{mv_r^2}{2} + \frac{mv_\theta^2}{2} = \frac{mv_r^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2}.$$

Тогда полная энергия

Ответ:

$$E = T + U = \frac{mv_r^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}.$$

A2 0.50 Введем переменную $w = 1/r$. Выразите радиальную скорость v_r через производную этой переменной по углу $dw/d\varphi$, а также L, m, w и подставьте это выражение в закон сохранения энергии.

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{w} \right) = -\frac{L}{m} \frac{dw}{d\varphi}.$$

Подставляем в результат предыдущего пункта и получаем (штрих – производная по углу)

Ответ:

$$E = \frac{L^2}{2m}(w'^2 + w^2) - GMmw$$

A3 0.50 Продифференцировав закон сохранения энергии по φ , получите уравнение второго порядка на $w(\varphi)$. Получите отсюда, что

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 - e \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

при некоторых постоянных p, e, φ_0 .

Дифференцируя, находим

$$\frac{L^2}{m}(w'w'' + ww') - GMmw' = 0,$$

откуда

$$w'' + w = \frac{GMm^2}{L^2}.$$

Решения этого уравнения

$$w = \frac{GMm^2}{L^2} + A \cos(\varphi - \varphi_0),$$

откуда

$$r = \frac{L^2/GMm^2}{1 - e \cos(\varphi - \varphi_0)}.$$

Значение $e = -AL^2/GMm^2$ определяется начальными условиями.

Ответ:

$$w'' + w = \frac{GMm^2}{L^2}.$$

B1 0.50

Используя соотношение между собственным временем частицы $d\tau$ и изменением ее координат, получите уравнение, связывающее квадраты производных $dr/d\tau$, $dt/d\tau$, $d\varphi/d\tau$.

Ответ:

$$c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{1 - r_g/r} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = c^2$$

B2 0.50

Используя законы сохранения энергии и момента импульса, а также соотношение, найденное в предыдущем пункте, получите выражение вида

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{E^2}{m^2 c^2} - c^2 V(r).$$

Здесь $V(r)$ – некоторый эффективный потенциал, который может содержать L , r_g и фундаментальные постоянные.

Подставляем выражения для энергии и момента импульса:

$$c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-2} - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - r^2 \left(\frac{L}{mr^2}\right)^2 = c^2.$$

Отсюда выражаем производную r .

Ответ:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{E^2}{m^2 c^2} - c^2 \left(1 + \frac{L^2}{m^2 c^2 r^2}\right) \left(1 - \frac{r_g}{r}\right).$$

B3 1.00

Покажите, что в нерелятивистском случае, то есть при $r \gg r_g$ и $v \ll c$, соотношение из предыдущего пункта переходит в стандартный закон сохранения энергии для движения в центральном потенциале.

В нерелятивистском случае $dr/d\tau \approx dr/dt = v_r$. Также $L \sim mvr \ll mcr$, Поэтому оба множителя в $V(r)$ близки к 1. Используя эти факты и заменяя $E = mc^2 + E_1$ получим

$$v_r^2 \approx \frac{m^2 c^4 + 2E_1 mc^2}{m^2 c^2} - c^2 \left(1 + \frac{L^2}{m^2 c^2 r^2} - \frac{r_g}{r}\right);$$

$$v_r^2 = \frac{2E_1}{m} - \frac{L^2}{m^2 r^2} + c^2 \frac{r_g}{r}.$$

Умножая на $m/2$ и используя определение гравитационного радиуса, получим стандартный закон сохранения энергии

Ответ:

$$\frac{mv_r^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} = E_1.$$

B4 0.50

Введем безразмерную переменную $u = r_g/r$, а также безразмерный момент импульса $l = L/mcr_g$. Используя определение момента импульса, выразите $dr/d\tau$ через $du/d\varphi$, а также l , m , r , r_g . Подставьте полученное выражение в результат B2. В результате у вас должно получиться уравнение, содержащее u'^2 , u и интегралы движения (l , E).

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{d\varphi}{d\tau} \frac{dr}{d\varphi} = \frac{L}{mr^2} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{r_g}{u}\right) = -\frac{Lu^2}{mr_g^2} \frac{r_g}{u^2} \frac{du}{d\varphi} = -lc \frac{du}{d\varphi}.$$

Подставляем в закон сохранения энергии:

Ответ:

$$l^2 c^2 u'^2 = \frac{E^2}{m^2 c^2} - c^2(1 + l^2 u^2)(1 - u).$$

B5 0.50

Продифференцировав результат B4 по φ , получите уравнение второго порядка на $u(\varphi)$. Оно аналогично уравнению из A3 и содержит релятивистские поправки к форме орбиты.

Рассмотрим закон сохранения энергии в виде

$$l^2 c^2 (u')^2 = E^2 / m^2 c^2 - c^2 + c^2 u - l^2 c^2 u^2 + l^2 c^2 u^3.$$

Продифференцируем его по углу и разделим на u' :

Ответ:

$$u'' = \frac{1}{2l^2} - u + \frac{3}{2}u^2.$$

C1 0.80

Пусть тело движется с моментом импульса l по круговой орбите. Найдите возможные значения радиуса орбиты a . Выразите ответ через r_g и l .

Радиус орбиты постоянен, значит $u = const, u'' = 0$.

Отсюда

$$3u^2 - 2u + 1/l^2 = 0;$$

$$u = \frac{1}{3} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{3}{l^2}} \right); \quad a = \frac{3r_g}{1 \pm \sqrt{1 - 3/l^2}}.$$

Нерелятивистскому случаю $r \gg r_g$ отвечает знак минус. При этом должно быть $l \gg 1$ и

$$r = 2r_g l^2 = \frac{L^2}{2m^2 c^2 r_g} = \frac{L^2}{GMm^2},$$

что совпадает со стандартным выражением для радиуса орбиты.

Ответ:

$$a = \frac{3r_g}{1 \pm \sqrt{1 - 3/l^2}}$$

C2 1.00

Используя уравнение из B5, получите линейное уравнение на отклонение орбиты от круговой и найдите угловое расстояние $\Delta\varphi$ между двумя соседними максимумами $u(\varphi)$. На какой угол $\delta\varphi$ смещается положение перигелия за один период? Выразите ответ через G, M, c, a .

Линеаризованное уравнение для малого смещения

$$\delta u'' = -\delta u + 3u_0 \delta u.$$

Это уравнение гармонических колебаний с частотой $\omega_\varphi = \sqrt{1 - 3u_0}$.

Значит расстояние между соседними максимумами (или минимумами)

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - 3u_0}}.$$

Смещение перигелия за один период

Ответ:

$$\delta\varphi = 3\pi u_0 = \frac{6\pi GM}{c^2 a}.$$

C3 ^{0.50} На какой угол перигелий Меркурия смещается за одно столетие? Орбиту Меркурия можно считать круговой, ее радиус $a = 57.9 \cdot 10^9$ м, период обращения Меркурия вокруг Солнца $T = 88$ дней, масса Солнца $M = 1.99 \cdot 10^{30}$ кг, гравитационная постоянная $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ м³/(кг · с²), скорость света $c = 2.998 \cdot 10^8$ м/с.

Смещение за столетие выражается через смещение за период как

$$\delta\varphi_1 = \delta\varphi \frac{T_1}{T} = \frac{6\pi GM}{c^2 a} \frac{T_1}{T} \approx 2.0 \cdot 10^{-4} \text{ рад} \approx 41''.$$

Ответ:

$$\delta\varphi_1 \approx 2.0 \cdot 10^{-4} \text{ рад} \approx 41''$$

C4 ^{1.00} Найдите минимальный радиус устойчивой круговой орбиты для частицы, движущейся в поле черной дыры. Выразите ответ через r_g .

Круговая орбита устойчива, если маленькие отклонения от нее не растут со временем. Используя уравнение для малых отклонений из C2 (при его выводе фактически не использовалось условие $u_0 \ll 1$). Малые отклонения не возрастают, если частота колебаний вещественна. Для этого необходимо $1 - 3u_0 > 0$, то есть $u_0 \geq 1/3$. Значит минимальный радиус орбиты $r = 3r_g$. Используя формулу для радиуса орбит, видим, что он достигается в пределе больших моментов импульса $l \gg 1$. При конечных значениях момента импульса радиусы орбит всегда больше этого предельного значения.

Ответ:

$$r = 3r_g$$

D1 ^{0.20} Запишите уравнение, описывающее вид траектории $u(\varphi)$ ультрарелятивистской частицы, с учетом условия $l \gg 1$. Используйте результат B5.

В результате B5 положим $l \rightarrow \infty$. Тогда из уравнения исчезнут все параметры и мы получим

Ответ:

$$u''(\varphi) + u = \frac{3}{2}u^2.$$

D2 ^{0.40} Пренебрежем в уравнении из D1 нелинейными по $u(\varphi)$ членами. Найдите решение $u = u_0(\varphi)$, которое описывает частицу, пролетающую на минимальном расстоянии b от звезды, причем минимуму отвечает угол $\varphi = 0$.

Пренебрежем в уравнении на u нелинейным членом. Тогда нужно решить уравнение

$$u'' + u = 0.$$

Решение с максимумом при $\varphi = 0$, соответствующем минимальному расстоянию

$$u = A \cos \varphi.$$

Амплитуда A связана с минимальным расстоянием соотношением

$$A = \frac{r_g}{b}$$

Ответ:

$$u_0(\varphi) = \frac{r_g}{b} \cos \varphi.$$

D3 ^{0.60} Рассматривая нелинейный член в D1 как малую поправку, заменим в нем $u(\varphi)$ на $u_0(\varphi)$. Получите таким образом поправку $u_1(\varphi)$ к решению из D1. Таким образом, приближенное решение нелинейного уравнения будет иметь вид $u(\varphi) = u_0(\varphi) + u_1(\varphi)$.

Заменим в правой части уравнения u на u_0 . Поправка u_1 удовлетворяет уравнению

$$u_1'' + u_1 = \frac{3}{4}A^2(1 + \cos 2\varphi).$$

Это линейное неоднородное уравнение, ищем решение в виде

$$u_1 = A_1 + A_2 \cos 2\varphi.$$

Подставляя в уравнение, находим коэффициенты

$$A_1 = \frac{3A^2}{4}; \quad A_2 = -\frac{A^2}{4}$$

Ответ:

$$u_1(\varphi) = \frac{A^2}{4}(3 - \cos 2\varphi)$$

D4 1.00 Частица удаляется на бесконечность, когда $u(\varphi) = 0$. Используя приближенное решение из предыдущего пункта, найдите угол отклонения частицы от прямолинейного распространения. Выразите ответ через G, M, c, b .

Нам нужно определить, под какими углами частица удаляется на бесконечность. При $r \rightarrow \infty$ $u = 0$, поэтому нужно решить уравнение

$$A \cos \varphi + \frac{A^2}{4}(3 - \cos 2\varphi) = 0.$$

Поскольку A – малый параметр, решения мало отличаются от случая бесконечно малых A , когда $\cos \varphi = 0$ и $\varphi = \pm\pi/2$. Тогда можно приближенно считать, что $\cos 2\varphi \approx \cos \pi = -1$. Получим уравнение

$$\cos \varphi = -A,$$

откуда при малых A находим

$$\varphi = \pm \left(\frac{\pi}{2} + A \right).$$

Разность этих двух значений $\pi + 2A$, а ее отклонение от π – это угол отклонения луча под действием гравитационного поля. Луч света отклоняется на величину

Ответ:

$$\delta\varphi = 2A = \frac{2r_g}{b} = \frac{4GM}{c^2b}.$$